В. А. ГУСЕВ А. И. МЕДЯНИК

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 7 класса

Дидактические материалы

В. А. ГУСЕВ А. И. МЕДЯНИК

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 7 класса

Дидактические материалы

Пособие для учителя

Рекомендовано Главным управлением школ Министерства просвещения СССР

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1986

ББК 74.262
Г96

Рецензенты:
старший научный сотрудник НИИ школ МП РСФСР В. В. Пикан;
методист кабинета ЛОНО г. Москвы Г. А. Ястребинецкий

Валерий Александрович Гусев
Анатолий Игнатьевич Медяник

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 7 КЛАССА

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Т. А. Бурмистрова*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Г. В. Субочева*
Корректоры *Е. Е. Абашкина, Н. В. Красильникова*

ИБ № 10511

Сдано в набор 20.08.85. Подписано к печати 15.02.86. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. кн. журн. отеч. Гарнит. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 4,0. Усл. кр.-отт. 4,25. Уч.-изд. л. 3,58. Тираж 730 000 экз. Заказ № 319. Цена 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Отпечатано с диапозитивов ордена Трудового Красного Знамени фабрики «Детская книга» № 1 Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 127018, Москва, Сущевский вал, 49 на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфическом комбинате Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Гусев В. А., Медяник А. И.
Г96 Задачи по геометрии для 7 класса: Дидакт. материалы: Пособие для учителя.— М.: Просвещение, 1986.—64 с.: ил.

Данное пособие содержит самостоятельные работы, дифференцированные задания и дополнительные задачи по геометрии для VII класса средней школы. Оно составлено в соответствии с учебным пособием А. В. Погорелова «Геометрия, 6—10» (М.: Просвещение, 1984).

Г $\frac{4306010400-384}{103(03)-86}$ инф. письмо —86, доп. № 1 ББК 74.262

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит дополнительный задачный материал по курсу геометрии VII класса. Оно ориентировано на учебное пособие А. В. Погорелова «Геометрия, 6—10» (М., Просвещение, 1984, 288 с.).

Пособие включает 21 самостоятельную работу, составленных как к основным пунктам учебного пособия по геометрии, так и ко всем его параграфам, 15 дифференцированных заданий по основным разделам курса и систему дополнительных задач к каждому параграфу пособия.

Основной целью пособия является помощь учителю в организации самостоятельной работы и контроля знаний учащихся на уроках и вне их. Задания составлены с учетом выделения главных и наиболее важных разделов курса. Самостоятельные работы предназначены для обучения семиклассников самостоятельному решению задач по только что изученному материалу, способствуют его повторению и закреплению. Задачи, помещенные в работах, могут быть также использованы как индивидуальные задания при опросе и в качестве домашних заданий. Многие из предлагаемых заданий помогают отрабатывать практические умения и навыки учащихся, однако учителю каждый раз следует внимательно следить за обоснованностью и четкостью выводов.

Достаточно полное представление о содержании той или иной самостоятельной работы дает следующее распределение их по темам и параграфам:

С-1. Параллелограмм.
С-2. Прямоугольник. Ромб.
С-3. Теорема Фалеса.
С-4. Трапеция.
С-5. Четырехугольники (§ 6).
С-6[1]. Косинус угла.
С-7. Теорема Пифагора.
С-8. Работа с таблицами.
С-9. Значение синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°.

---

[1] Эта самостоятельная работа проводится перед изучением теоремы 7.1.

С-10. Неравенство треугольника.
С-11. Теорема Пифагора (§ 7).
С-12. Введение координат на плоскости. Координаты середины отрезка.
С-13. Расстояние между точками. Уравнения окружности и прямой.
С-14. Расположение прямой относительно системы координат. Пересечение прямой и окружности.
С-15. Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°.
С-16. Декартовы координаты на плоскости (§ 8).
С-17. Примеры преобразований фигур.
С-18. Движение. Свойства движения.
С-19. Преобразование подобия.
С-20. Подобие фигур.
С-21. Преобразование фигур (§ 9).

Каждая самостоятельная работа рассчитана на 10—15 мин. С целью учета индивидуальных особенностей школьников самостоятельные работы даются в четырех вариантах, причем первый из них самый простой, а четвертый — наиболее сложный. Второй и третий варианты имеют промежуточную сложность и являются примерно равноценными, что позволяет использовать их одновременно. В случае необходимости можно использовать одновременно и работы разной сложности, включая и наиболее простую. Но это вовсе не предполагает постоянного деления класса на слабых, средних и сильных учащихся. Такое деление является весьма условным и должно рассматриваться как временное.

При проведении каждой самостоятельной работы варианты должны быть распределены так, чтобы могли развиваться способности всех без исключения учащихся. Критерий такого распределения сводится к тому, чтобы для каждого ученика работа была посильна, т. е. реально выполнима, но требовала напряжения и усилий для ее выполнения.

Учитель во время выполнения учащимися самостоятельной работы может консультировать учеников. Самостоятельные работы носят, как правило, обучающий характер. Поэтому учитель в зависимости от поставленной им цели и от подготовки учащихся может предложить для решения в классе лишь часть из заданий той или иной самостоятельной работы.

Если в условии задачи не говорится, при помощи каких инструментов следует выполнять построение, то ученик может воспользоваться любым из инструментов: линейкой, циркулем, угольником, транспортиром.

Время, необходимое для выполнения заданий самостоятельных работ, существенно зависит от требований к оформлению решения задач и набора инструментов, с помощью которых выполняются построения. Поэтому учащимся нужно четко указывать эти требования.

При выполнении заданий на построение от учащихся не всегда следует требовать описание построений. О правильности построения можно судить по чертежу. При решении задач на вычисление и доказательство учащиеся должны кратко записать решение.

Оценка работы проводится учителем с учетом самостоятельности ее выполнения. Если самостоятельная работа носила обучающий характер, то неудовлетворительные оценки не выставляются.

Особое место в системе самостоятельных работ занимают самостоятельные работы к параграфам, которые помогают осуществить контроль усвоения всего материала параграфа. На выполнение этих работ требуется 15—20 мин и они могут рассматриваться как подготовительные к выполнению контрольных работ. Учитель по своему усмотрению может использовать задания, помещенные в этих работах, при составлении контрольных работ.

Дифференцированные задания являются естественным продолжением и развитием самостоятельных работ. Но если разделение на варианты при составлении и проведении самостоятельных работ сопряжено с трудностями учета индивидуальных особенностей учащихся, то дифференцированные задания учитывают их автоматически. В то же время дифференцированные задания предполагают более высокий уровень развития учащихся, так как направлены на развитие у них логического мышления.

Цель дифференцированных заданий состоит не только в том, чтобы способствовать развитию логического мышления школьников, но и в том, чтобы контролировать уровень такого развития, что очень важно для всего учебного процесса. Структура заданий позволяет выявить учащихся, склонных к дедуктивному мышлению, способствует дальнейшему их развитию. Такие задания приучают к последовательности в мышлении, к его четкости и точности. Имеются дифференцированные задания двух типов. В заданиях Д-3, Д-6, Д-8, Д-9, Д-10, Д-12, Д-13 требуется доказать по четыре утверждения. Первое утверждение самое простое, а четвертое — наиболее сложное (оно предназначено только для сильных учащихся). Доказательство каждого последующего утверждения опирается на предыдущие. Кроме того, в отдельных случаях ученикам даются по ходу и другие указания. В заданиях Д-1, Д-2, Д-7, Д-11, Д-14, Д-15 предлагается найти по два или три существенно различных доказательства одного и того же утверждения (сильные учащиеся могут найти больше таких доказательств). Если первый тип дифференцированных заданий можно квалифицировать как обучающие (умению аргументировать, доказывать) задания, то задания второго типа являются творческими, так как в них учащимся надо найти идею и схему доказательства, двух доказательств (в задании первого типа схема доказательства последующих утверждений определяется структурой самого задания).

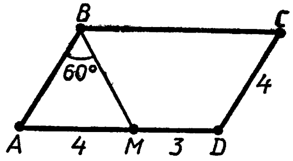
Возможны различные организационные формы выполнения дифференцированных заданий: классная или домашняя работа, классно-домашняя работа. При выборе формы проведения следует иметь в виду, что дифференцированные задания не должны подменять программный материал. Они являются лишь дополнениями к нему.

Раздел дополнительных задач развивает систему задач, имеющихся в учебном пособии А. В. Погорелова. Эти задачи распределены по параграфам. Они могут быть предложены для самостоятельной работы учащимся, успешно справляющимся с задачами учебного пособия. Кроме этого, данная система задач может быть рекомендована для проведения кружковых занятий и при организации факультативов. Особенно сложные задачи отмечены звездочкой (*).

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1



1. Дан параллелограмм (см. рис.) Вычислите его периметр и углы.

2. Постройте параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом 50° между ними.

С-2

1. Периметр прямоугольника равен 48 см. Найдите его стороны, если они относятся как 1:2.

2. Диагональ ромба образует с одной из его сторон угол 40° Найдите углы ромба.

С-3

1. Начертите произвольный отрезок AB и разделите его на равные части.

2. Стороны треугольника равны 4 см, 6 см и 8 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

С-4

1. Углы при основании трапеции равны 46° и 72°. Найдите остальные углы трапеции.

2. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от прямой, удалены от нее на расстояния 6 см и 10 см. На каком расстоянии от этой прямой находится середина этого отрезка?

С-5

1. Один из углов параллелограмма в 3 раза больше другого его угла. Найдите все углы параллелограмма.

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является параллелограммом.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 4 равные части и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Чему равны длины этих отрезков, если основание треугольника равно 8 см?

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник с прямым углом C и углом A, равным 60°. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Постройте прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 и углом A_1, равным 60°. Вычислите отношение A_1C_1 к A_1B_1 и сравните его с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Стороны прямоугольника 8 см и 15 см. Найдите его диагональ.

2. В равнобокой трапеции основания равны 8 см и 14 см, боковая сторона — 5 см. Найдите высоту трапеции.

С-8

1. Найдите по таблицам синус, косинус и тангенс углов 65°, 65°12′, 65°15′.

2. Найдите по таблицам угол α, если: а) $\sin \alpha = 0{,}3502$; б) $\cos \alpha = 0{,}5850$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

С-9

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = 1$ см, $\angle A = 30°$. Найдите катеты треугольника.

2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 3 см. Чему равны катеты этого треугольника?

С-10

1. Дан треугольник ABC. Запишите для него неравенство треугольника.

2. Расстояние от дома до школы 1 км, а от дома до станции — 1,5 км. Может ли расстояние от школы до станции равняться 3 км?

С-11

1. Докажите, что диагональ прямоугольника больше любой его стороны.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $AD = \frac{16}{5}$ см, $AC = 4$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC.

3. Найдите катеты и второй острый угол прямоугольного треугольника по гипотенузе $c = 13$ см и острому углу $\alpha = 35°$.

С-12

1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на них и постройте точки A (3, −1), B (−2, 4), C (1, 1), D (−3, −2).

2. Найдите координаты середины отрезка с концами в точках (3, −1) и (−2, −2).

С-13

1. Найдите длину диаметра окружности, если его концами являются точки $(3, 4)$ и $(2, -1)$.

2. Найдите координаты точек пересечения окружности $(x-4)^2+ +y^2=25$ с осью y.

С-14

1. Запишите уравнение прямой, параллельной оси y и проходящей через точку $(-1, 2)$.

2. Расстояние от центра окружности, заданной уравнением $(x-1)^2+(y+2)^2=36$, до прямой a равно 6. Что можно сказать о взаимном расположении прямой a и данной окружности?

С-15

1. Пользуясь таблицами, найдите значения синуса, косинуса и тангенса углов: $145°$, $99°40'$.

2. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $90°<\alpha<180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках A $(2, -1)$, B $(-1, 3)$, C $(-3, 1)$ проведена медиана AD. Найдите длину этой медианы и составьте уравнение прямой, содержащей эту медиану.

2. Используя геометрические соображения, составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и точки $(6, 0)$ и $(0, 8)$.

3. Докажите, что синусы смежных углов равны.

С-17

1. Даны прямая a и точка C. Постройте: а) точку C_1, симметричную точке C относительно прямой a, б) точку C_2, симметричную точке C относительно произвольной точки A на прямой a.

2. Даны точка A и центр гомотетии O. Постройте точку A' при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии, равным 2.

С-18

1. Даны отрезок CD и точка A, не лежащая на прямой CD. Постройте фигуру, симметричную отрезку CD относительно центра A.

2. Сколько осей симметрии имеет луч?

С-19

1. Даны луч AB и точка O. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O перейдет этот луч, если коэффициент гомотетии равен 2.

2. Стороны треугольника $a = 5$ см, $b = 4{,}6$ см и $c = 2{,}5$ см. Найдите стороны a' и c' подобного ему треугольника, если $b' = 2{,}3$ см.

С-20

1. Стороны двух треугольников равны соответственно 7,5 дм, 6 дм, 7,2 дм и 25 мм, 20 мм, 24 мм. Подобны ли эти треугольники?

2. Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если угол при основании одного из них равен углу при основании другого.

С-21

1. При симметрии относительно середины стороны AC треугольника ABC точка B переходит в точку D. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ есть параллелограмм.

2. В прямоугольном треугольнике ABC (C—прямой угол) проведена высота CD. Докажите, что $CD = \frac{CB \cdot CA}{AB}$.

3. Докажите, что у подобных треугольников биссектрисы, проведенные из соответствующих вершин, относятся как их соответственные стороны.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 2

С-1

1. Вычислите углы параллелограмма, если его углы, прилежащие к одной стороне, относятся как 2:3.

2. Постройте параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и диагональю 5 см.

С-2

1. Периметр прямоугольника равен 96 см. Найдите его стороны, если они относятся как 1:3.

2. Один из углов, которые образует сторона ромба с его диагоналями, больше другого на 20°. Найдите углы ромба.

С-3

1. Начертите произвольный отрезок BC и разделите его на 5 равных частей.

2. Периметр треугольника равен 6,7 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от него одной из его средних линий.

С-4

1. В равнобокой трапеции диагональ образует с основанием угол 30°. Найдите углы трапеции, если известно, что меньшее основание трапеции равно ее боковой стороне.

2. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагональ BD делит среднюю линию трапеции на отрезки 6 см и 12 см. Найдите основания этой трапеции.

С-5

1. Один из углов параллелограмма в 2 раза меньше другого его угла. Найдите все углы параллелограмма.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является ромбом.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 4 равные части и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Наименьший из этих отрезков равен 3 см. Чему равно основание треугольника и остальные два отрезка?

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Постройте прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 и углом A_1, равным углу A треугольника ABC. Вычислите отношение A_1C_1 к A_1B_1 и сравните его с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна 9 см, а диагональ — 15 см.

2. В окружности, радиус которой 25 см, по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды 40 см и 30 см. Найдите расстояние между хордами.

С-8

1. Найдите по таблицам синус, косинус и тангенс углов $44°42'$, $44°40'$, $70°25'$.

2. Найдите по таблицам угол α, если: а) $\sin \alpha = 0{,}5035$; б) $\cos \alpha = 0{,}8208$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5774$.

С-9

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 3$ см, $\angle A = 60°$. Найдите остальные стороны треугольника.

2. Медиана прямоугольного равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 4 см. Найдите стороны данного треугольника.

С-10

1. Может ли сторона треугольника быть меньше разности двух других его сторон? Ответ объясните.

2. Расстояние от дома до кинотеатра 0,4 км, а расстояние от кинотеатра до магазина 0,5 км. Может ли расстояние от дома до магазина равняться 1 км?

С-11

1. Докажите, что в равностороннем треугольнике медиана меньше его стороны.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $BD = \frac{25}{13}$ см, $BC = 5$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC.

3. Найдите гипотенузу, катет и острый угол прямоугольного треугольника по катету $a = 14$ см и противолежащему углу $\alpha = 42°$.

С-12

1. Найдите расстояние от точки A $(-5, -2)$ до оси x.

2. Найдите координаты центра окружности, если концами ее диаметра являются точки $(-1, 1)$ и $(5, -5)$.

С-13

1. Составьте уравнение окружности с центром на прямой $y = 4$, касающейся оси x в точке $(-1, 0)$.

2. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями $4x - 2y - 3 = 0$ и $3x + 2y - 9 = 0$.

С-14

1. Запишите уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку $(2, -3)$.

2. Окружность с центром в точке $(2, 1)$ касается оси x. Пересекает ли эта окружность ось y? Ответ объясните.

С-15

1. Пользуясь таблицами, найдите значения синуса, косинуса и тангенса углов $133°$, $105°10'$.

2. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ и $90° < \alpha < 180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(-6, 4)$, $B(1,2)$, $C(4, 0)$ проведена медиана BD. Найдите длину этой медианы и составьте уравнение прямой, содержащей эту медиану.

2. Используя геометрические соображения, составьте уравнение окружности, описанной около прямоугольника с вершинами в точках $(24, 0)$, $(0, 10)$, $(24, 10)$.

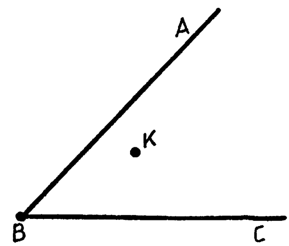
3. Докажите, что косинусы смежных углов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

С-17

1. Дан квадрат $ABCD$. Постройте: а) точку B', симметричную точке B относительно прямой AC; б) точку C', симметричную точке C относительно точки A.

2. Даны точки A и B и центр гомотетии O. Постройте точки, в которые перейдут данные точки A и B при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии, равным 0,5.

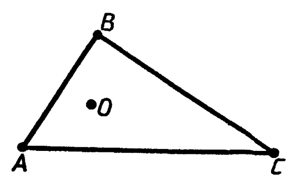
С-18



1. Даны угол ABC и точка K, не лежащая на сторонах этого угла (см. рис.) Постройте фигуру, симметричную углу относительно центра K.

2. Сколько осей симметрии имеет квадрат?

С-19



1. Даны треугольник ABC и точка O (см. рис.). Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O перейдет этот треугольник, если коэффициент гомотетии равен 1,5.

2. Стороны данного треугольника 7 см, 5 см и 4 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если меньшая его сторона 1,5 см.

С-20

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 6. Какими будут стороны подобного ему треугольника с периметром 58,5 см?

2. Два угла треугольника равны 54° и 18°. Докажите, что биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, отсекает треугольник, подобный исходному.

С-21

1. При симметрии относительно прямой AC вершина B равностороннего треугольника ABC переходит в точку D. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ есть ромб.

2. В прямоугольном треугольнике ABC (C — прямой угол) проведена высота CD. Докажите, что $\frac{AC^2}{AD} = \frac{BC^2}{BD}$.

3. Докажите, что у подобных треугольников медианы, проведенные из соответствующих вершин, относятся как их соответствующие стороны.

Вариант 3

С-1

1. Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найдите стороны параллелограмма.

2. Постройте параллелограмм с диагоналями 12 см и 8 см и углом 60° между ними.

С-2

1. Меньшая сторона прямоугольника равна 4 см и образует с диагональю угол 60°. Найдите диагонали прямоугольника.

2. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 1:4. Найдите углы ромба.

С-3

1. Начертите произвольный отрезок AC и разделите его на 6 равных частей.

2. В прямоугольном треугольнике через середину его гипотенузы проведены прямые, параллельные его катетам. Найдите периметр образовавшегося прямоугольника, если катеты треугольника равны 10 см и 8 см.

С-4

1. В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна к ее боковой стороне и образует с основанием угол 15°. Найдите углы трапеции.

2. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка, которые относятся как 3:8. Найдите основания трапеции, если средняя линия трапеции равна 22 см.

С-5

1. Сумма двух углов параллелограмма равна 90°. Найдите все углы этого параллелограмма.

2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является прямоугольником.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 3 равные части и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Найдите эти отрезки, если основание треугольника равно 6 см.

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Разделите гипотенузу AB на 3 равные части точками B_1 и B_2. Опустите из точек B_1 и B_2 перпендикуляры B_1C_1 и B_2C_2 на сторону AC. Вычислите отношения AC_1 к AB_1 и AC_2 к AB_2 и сравните их между собой и с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Высота равнобедренного треугольника равна 20 см, а его основание — 30 см. Найдите боковую сторону данного треугольника.

2. В окружности, радиус которой 25 см, проведены по одну сторону от ее центра две параллельные хорды 40 см и 30 см. Найдите расстояние между этими хордами.

С-8

1. Найдите по таблицам синус, косинус и тангенс углов 56°18′, 56°22′, 25°47′.

2. Найдите по таблицам угол α, если: а) $\sin\alpha = 0{,}9222$; б) $\cos\alpha = 0{,}1828$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

С-9

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 4$ см, $\angle B = 30°$. Найдите остальные стороны треугольника.

2. Биссектриса прямоугольного равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 3 см. Найдите стороны данного треугольника.

С-10

1. Может ли сторона треугольника быть равной разности двух других его сторон? Ответ объясните.

2. Расстояние от школы до катка 1 км, а расстояние от катка до дома 1, 2 км. Может ли расстояние от школы до дома равняться 3 км?

С-11

1. Докажите, что периметр параллелограмма меньше удвоенной суммы его диагоналей.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $CD = 8$ см, $AD = 15$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

3. Найдите катет и острые углы прямоугольного треугольника по гипотенузе $c = 18$ см и катету $a = 4$ см.

С-12

1. Найдите расстояние от точки B $(-2, 1)$ до оси y.

2. Найдите координаты конца диаметра, если другим его концом является точка $(5, -2)$, а центром окружности — точка $(2, 0)$.

С-13

1. Составьте уравнение окружности с центром на прямой $x = -3$, касающейся оси y в точке $(0, 2)$.

2. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 4y + 7 = 0$ и $3x - y - 5 = 0$.

С-14

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(4, -2)$.

2. Окружность с центром в точке $(2, 3)$ касается оси y. Пересекает ли эта окружность ось x? Ответ объясните.

С-15

1. Пользуясь таблицами, найдите значения синуса, косинуса и тангенса углов $127°$, $100°15'$.

2. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ и $90° < \alpha < 180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(2, -3)$, $B(-2, 3)$, $C(6, -3)$ проведена средняя линия B_1C_1, параллельная стороне BC. Найдите длину и составьте уравнение этой средней линии.

2. Составьте уравнение окружности, касающейся осей x и y и прямой $x = -4$.

3. Используя геометрические соображения, докажите, что прямая $y = 3$ не пересекает окружность, задаваемую уравнением $x^2 + (y + 3)^2 = 25$.

С-17

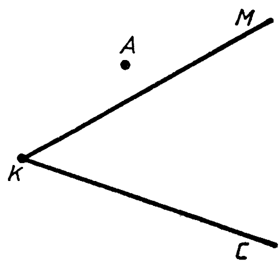
1. Дан ромб $ABCD$. Постройте: а) точку A', симметричную точке A относительно прямой BD; б) точку D', симметричную точке D относительно точки C.

2. Даны точки A и B и центр гомотетии O. Постройте точки, в которые перейдут данные точки A и B при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии, равным 1,5.

С-18

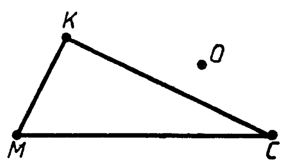
1. Даны угол MKC и точка A, не лежащая на сторонах этого угла (см. рис.). Постройте фигуру, симметричную углу MKC относительно центра A.

2. Сколько осей симметрии имеет ромб?



С-19

1. Даны треугольник MKC и точка O (см. рис.). Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O перейдет этот треугольник, если коэффициент гомотетии равен 0,5.



2. Стороны данного треугольника 6 см, 4 см и 3 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если бóльшая его сторона равна 3,5 см.

С-20

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 5, 6, 8. Вычислите длины сторон треугольника, подобного данному, если разность между большей и меньшей его сторонами равна 15 см.

2. Углы треугольника пропорциональны числам 6, 3, 1. Докажите, что биссектриса, проведенная из вершины большего угла, отсекает от этого треугольника треугольник, ему подобный.

С-21

1. Докажите, что при симметрии относительно точки прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

2. В прямоугольном треугольнике ABC (C — прямой угол) проведена высота CD. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot DB$.

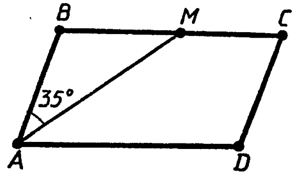
3. Найдите стороны квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b и имеющего с треугольником общий прямой угол.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 4

С-1

1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ отсекает от него треугольник ABM с углом BAM, равным $35°$ (см. рис.) Найдите углы параллелограмма.



2. Постройте параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см и расстоянием между бо́льшими сторонами, равным 2 см.

С-2

1. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит сторону BC на части 2 см и 6 см. Найдите периметр прямоугольника.

2. Найдите углы ромба, в котором одна диагональ равна стороне.

С-3

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Проведите через точку C прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла BAD, делился точкой C в отношении $2:3$.

2. Диагональ квадрата равна 7 см. Найдите периметр четырехугольника, образованного отрезками, последовательно соединяющими середины сторон данного квадрата.

С-4

1. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB, $BC = CD$, $\angle A = 50°$. Найдите остальные углы трапеции.

2. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Докажите, что эти отрезки делят любой отрезок с концами на основаниях трапеции на 3 равные части.

С-5

1. Разность двух углов параллелограмма равна 90°. Найдите все углы этого параллелограмма.

2. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является квадратом.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 3 равные части и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Чему равны основание треугольника и меньший из проведенных отрезков, если больший из них равен 2 см?

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Возьмите на гипотенузе AB две произвольные точки B_1 и B_2. Опустите из них перпендикуляры B_1C_1 и B_2C_2 на сторону AC. Вычислите отношения AC_1 к AB_1 и AC_2 к AB_2 и сравните их между собой и с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Найдите стороны ромба, если его диагонали равны 24 см и 18 см.

2. В окружности проведена хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину. Найдите эту хорду, если диаметр окружности равен 8 см.

С-8

1. Найдите по таблицам косинус, синус и тангенс углов 35°23′, 68°25′, 82°58′.

2. Найдите по таблицам угол α, если: а) $\sin\alpha = 0{,}7700$; б) $\cos\alpha = 0{,}0964$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8545$.

С-9

1. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30°, а прилежащий к нему катет равен 3 см. Найдите медиану этого треугольника, проведенную к гипотенузе.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$, $BC = 2$ см. Найдите AC.

С-10

1. Даны три точки A, B и C, для которых $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AC = 4$ см. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

2. Докажите, что периметр параллелограмма больше суммы длин его диагоналей.

С-11

1. Докажите, что периметр равнобокой трапеции больше суммы ее диагоналей.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $CD = 7$ см, $BD = 24$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

3. Найдите гипотенузу и острые углы прямоугольного треугольника по катетам $a = 5$ см и $b = 10$ см.

С-12

1. Даны точки A (2, 4) и B (3, − 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось x, но не пересекает ось y.

2. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A(− 1, 2), B(3, 1), D(− 2, − 3). Найдите координаты вершины C.

С-13

1. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки (0, 2), (4, 0) и (4, 2).

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $(-3, 1)$ и $(2, -2)$.

С-14

1. Какие углы образует прямая, заданная уравнением $2x + 2y + 3 = 0$, с осью x?

2. Докажите, что любая прямая, проходящая через середину радиуса окружности, пересекает ее в двух точках.

С-15

1. Пользуясь таблицами, найдите значения синуса, косинуса и тангенса углов 92°40′, 152°17′.

2. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{40}{41}$ и $90° < \alpha < 180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(-1, 2)$, $B(5, 10)$, $C(1, -2)$ проведена средняя линия A_1B_1, параллельная стороне AB. Найдите длину и составьте уравнение этой средней линии.

2. Составьте уравнение окружности, касающейся осей x и y и прямой $y = 6$.

3. Используя геометрические соображения, докажите, что прямая $x = -1$ пересекает окружность $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ в двух точках.

С-17

1. Может ли у треугольника быть центр симметрии? ось симметрии?

2. Даны точки A, B и C и центр гомотетии O. Постройте точки, в которые перейдут данные точки A, B и C при гомотетии с центром O и коэффициентом, равным $1/3$.

С-18

1. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на них. Постройте прямые, симметричные данным относительно точки A.

2. Может ли четырехугольник иметь одновременно центр и ось симметрии? Если да, то приведите примеры.

С-19

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром A перейдет этот четырехугольник, если коэффициент гомотетии равен 2,5.

2. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

С-20

1. Основание треугольника 5 см, высота, проведенная к этому основанию, равна 3 см. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.

2. В остроугольном треугольнике проведены две высоты. Докажите, что получившаяся фигура содержит два подобных треугольника с общей вершиной.

С-21

1. Докажите, что при гомотетии прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

2. В прямоугольном треугольнике ABC (C — прямой угол) проведена высота CD. Выразите отрезки AD и DB через отрезки AC и CB.

3. Найдите отношения высот треугольника, проведенных к двум его сторонам a и b.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

Д-1. Параллелограмм

Даны три первые вершины параллелограмма $ABCD$. Постройте четвертую его вершину D. Найдите два различных способа ее построения.

Дополнительный вопрос[1]. Однозначно ли определяется точка D условиями задачи? Ответ объясните.

Д-2. Ромб, квадрат

Докажите, что если у ромба диагонали равны, то он является квадратом. Найдите два различных доказательства.

Д-3. Трапеция

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD.

1. Докажите, что вершины C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB.
2. Докажите, что вершины C и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD. (Воспользоваться утверждением задачи 60 из § 6.)
3. Докажите, что диагональ трапеции AC проходит между сторонами ее угла A. (Воспользоваться теоремой 2.4 и первыми двумя утверждениями.)
4. Докажите, что диагонали трапеции пересекаются.

Д-4. Четырехугольники

1. Через вершину D равнобокой трапеции $ABCD$ проведена прямая $a \parallel BC$, которая пересекает большее основание AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE равнобедренный.
2. Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.
3. Докажите, что у равнобокой трапеции диагонали равны.
4. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

[1] На дополнительный вопрос учащиеся отвечают по желанию.

Д-5. Перпендикуляр и наклонная

1. Из точки A, лежащей на стороне острого угла ABC, опущен перпендикуляр на прямую BC. На каком луче с началом в точке B лежит его основание? почему?

2. На стороне BC прямоугольного треугольника ABC (угол C — прямой) взята точка X. Докажите, что $AX < AB$.

3. На стороне BD треугольника ABD взята точка X. Докажите, что отрезок AX меньше по крайней мере одной из сторон треугольника: AB или AD.

4. Докажите, что расстояние между любыми точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

Д-6. Синус угла

1. Катеты прямоугольного треугольника равны $3a$ и $4a$. Чему равна гипотенуза этого треугольника?

2. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите его высоту, опущенную из вершины прямого угла на гипотенузу.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием $6a$ и высотой $4a$.

4. Найдите радиус окружности, касающейся всех сторон ромба с диагоналями $6a$ и $8a$.

Д-7. Соотношения в прямоугольном треугольнике

Меньшее основание равнобокой трапеции, равное a, равно ее боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Чему равно большее основание трапеции? Решите задачу двумя различными способами.

Д-8. Неравенство треугольника

1. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

2. Докажите, что сторона треугольника меньше половины его периметра.

3. Окружности с радиусами 0,6 м и 3,2 м пересекаются. Чему равно расстояние между их центрами, если оно выражается целым числом метров?

4. Докажите, что каждая сторона четырехугольника меньше суммы длин остальных его сторон.

Д-9. Координаты середины отрезка. Расстояние между точками

1. Найдите координаты середины отрезка с концами в точках $(-12, 6)$ и $(5, -1)$.

2. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-12, 6)$, $B(0, 11)$, $C(5, -1)$ и $D(-7, -6)$ является параллелограммом.

3. Докажите, что данный четырехугольник $ABCD$ является ромбом.

4. Докажите, что данный четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

Д-10. Пересечение двух окружностей

1. Пересекает ли окружность $x^2 + y^2 = 49$ окружности $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 49$ и $(x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 25$?

2. Докажите, что окружности $x^2 + y^2 = 100$ и $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ касаются.

3. Можно ли построить треугольник со сторонами, равными: а) 2 см, 5 см, 7 см; б) 4 см, 8 см, 11 см; в) 5 см, 6 см, 12 см?

4. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Д-11. Пересечение прямой с окружностью

Докажите, что окружность $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 49$ пересекает ось y, но не пересекает ось x. Приведите два различных доказательства.

Д-12. Свойства движения

1. Докажите, что середина отрезка является его центром симметрии.

2. При некотором движении четырехугольник $ABCD$ переходит в себя. Докажите, что любая его вершина переходит при этом в вершину.

3. Докажите, что если у четырехугольника есть центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Докажите, что если у фигуры есть две и только две оси симметрии, то у нее есть и центр симметрии.

Д-13. Преобразование подобия

1. Докажите, что при преобразовании подобия ромб переходит в ромб.

2. Докажите, что при гомотетии ромб переходит в ромб.

3. Впишите в данный треугольник ромб так, чтобы он имел с треугольником один общий угол.

4. Впишите в данный треугольник равносторонний треугольник так, чтобы на каждой стороне первого лежала одна вершина второго.

Д-14. Подобные треугольники

Докажите, что середины сторон треугольника являются вершинами подобного ему треугольника. Приведите три доказательства, опирающиеся на разные признаки подобия треугольников.

Д-15. Подобные треугольники

Стороны треугольника — a, b, c. В треугольник вписан ромб, имеющий с ним общий угол. Найдите сторону ромба. (Рассмотрите три случая.)

Дополнительный вопрос. В каком отношении биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника, к которой она проведена?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи к § 6

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

2. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$, то $ABCD$ — параллелограмм.

3. Диагональ параллелограмма делит его на два треугольника со сторонами 2 см, 3 см и 4 см. Найдите периметр этого параллелограмма. Сколько решений имеет задача? Покажите их на чертеже.

4. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Известно, что $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см. Найдите периметр параллелограмма, три вершины которого находятся в данных точках. Сколько решений имеет задача?

5. Дан равнобедренный треугольник. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр получившегося параллелограмма не зависит от выбора точки на основании данного треугольника.

6. Периметр треугольника, отсекаемого от параллелограмма диагональю, равен 25 см, а периметр параллелограмма — 30 см. Найдите диагональ.

7. Разность двух соседних сторон параллелограмма равна 10 см, а одна из них равна: а) 6 см; б) 13 см. Найдите другую сторону и периметр параллелограмма.

8. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки a и b. Выразите через a и b периметр этого параллелограмма.

9. Один из углов параллелограмма равен 45°. Перпендикуляр, опущенный из вершины его тупого угла, равен 4 см и своим основанием делит сторону параллелограмма на два равных отрезка. Найдите: а) эту сторону; б) углы, которые образует диагональ параллелограмма, проведенная из той же вершины, со сторонами параллелограмма.

10. Постройте параллелограмм по двум сторонам 2 см и 5 см, если известно, что одна из его диагоналей перпендикулярна к меньшей стороне.

11. Постройте параллелограмм по стороне, прилежащему к ней углу и диагонали, выходящей из вершины другого угла. Сколько решений может иметь эта задача?

12*. Постройте параллелограмм по периметру, диагонали и противолежащему ей углу.

13*. Постройте параллелограмм по стороне, сумме длин диагоналей и углу между ними.

14. Две доступные точки A и B разделены препятствием. Найдите расстояние между ними, пользуясь одним из признаков параллелограмма.

15. Найдите расстояние между недоступными точками A и B, используя признак параллелограмма, содержащийся в теореме 6.1.

16. Для определения расстояния между двумя недоступными точками A и B, расположенными на другом берегу реки (рис. 1), на местности провешивают произвольную прямую MN и отмечают на ней такие точки K и L, что $AK \perp MN$ и

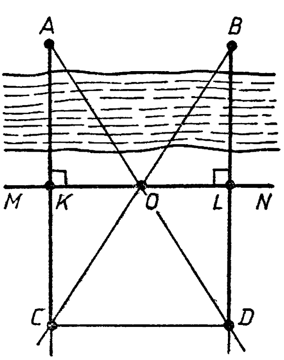


Рис. 1

$BL \perp MN$. Разделив полученный таким образом отрезок KL пополам точкой O, провешивают через точку O прямые AO и BO и находят точки C и D их пересечения с прямыми AK и BL. Докажите, что полученный таким образом отрезок CD равен искомому отрезку AB.

17. 1) Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько параллелограммов образовалось?

2) Сколько параллелограммов образуется при пересечении четырех параллельных прямых другими четырьмя параллельными прямыми?

3) Сколько образуется параллелограммов при пересечении n параллельных прямых другими n параллельными прямыми?

18. Дан параллелограмм $ABCD$. Через точку пересечения его диагоналей проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках E и F соответственно, а другая — стороны BC и AD в точках G и H. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

19*. Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах AB и CD отложены равные отрезки AE и CF, а на сторонах BC и AD — равные отрезки BG и DH. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

20*. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Диагональ AC пересекает отрезки BF и ED в точках G и H соответственно. Докажите, что отрезки AG, GH и HC равны.

21* Можно ли заменить приведенное в учебнике А. В. Погорелова доказательство теоремы о свойствах диагоналей параллелограмма (теорема 6.2) таким рассуждением?

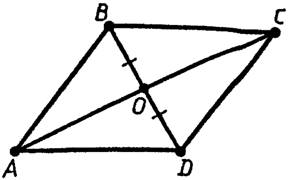


Рис. 2

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и BD — его диагональ. Соединим точку O, являющуюся серединой отрезка BD, с точками A и C (рис. 2). Треугольники OBC и ODA равны по двум сторонам и углу между ними. У них $OB = OD$ по построению, $BC = DA$ по свойству противолежащих сторон параллелограмма, а углы OBC и ODA равны как внутренние накрест лежащие при параллельных BC, AD и секущей BD. Из равенства треугольников следует, что $OC = OA$, $\angle BOC = \angle DOA$. А из равенства углов BOC и DOA следует, что полупрямые OC и OA — дополнительные полупрямые одной прямой, т. е. что точка O лежит на прямой AC. Значит, диагонали AC и BD пересекаются в точке O, и так как $OB = OD$ по построению, а $OC = OA$ по доказанному, то этой точкой они делятся пополам. Теорема доказана.

22. Докажите, что четырехугольник, у которого есть три прямых угла, является прямоугольником.

23. Три вершины прямоугольника лежат на окружности. Где

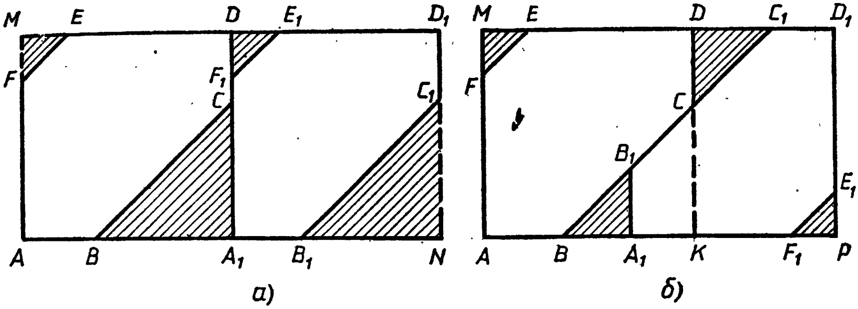


Рис. 3

находится центр этой окружности? Лежит ли на ней четвертая вершина прямоугольника?

24. Постройте прямоугольник по заданным серединам всех его сторон.

25. Постройте прямоугольник, если заданы точка пересечения его диагоналей и две соседние вершины.

26. Постройте прямоугольник по стороне и противолежащему ей углу между диагоналями прямоугольника.

27. Постройте прямоугольник по диагонали и периметру.

28. Школьная мастерская получила заказ на изготовление партии пластин прямоугольной формы. Параллельность противолежащих сторон пластин технология изготовления гарантирует. Как проверить, располагая лишь линейкой, будет ли пластина иметь форму прямоугольника?

29. Фруктовый сад колхоза имеет форму прямоугольника, стороны которого относятся как 16 : 11, причем его ширина меньше длины на 250 м. За сколько времени сторож может обойти по краю весь участок, идя со скоростью 4 км/ч?

30. На рисунках 3*а*, *б* показаны соответственно нерациональный и рациональный раскрой стальной полосы при изготовлении заготовки для детали комбайна. Подсчитайте, сколько погонных метров полосы будет сэкономлено при изготовлении 200 заготовок.

31. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

32. Найдите углы ромба, если основание перпендикуляра, опущенного из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

33. Периметр ромба равен 16 см, расстояние между противолежащими сторонами 2 см. Найдите углы ромба.

34. Через точку пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами ромба являются вершинами прямоугольника.

35. В параллелограмме $ABCD$ ($AD > AB$) биссектрисы углов A и B пересекают стороны параллелограмма BC и AD в точках

K и L соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABKL$ — ромб.

36. Докажите, что почтовый конверт (стандартный) склеивается из листа бумаги, имеющего форму ромба (припуски на склеивание не учитывать).

37. Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и две соседние вершины.

38. Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и середины двух смежных сторон.

39. Как с помощью двусторонней линейки (с параллельными краями) разделить угол пополам?

40*. Постройте ромб по сумме длин диагоналей и одному из углов.

41. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного этими прямыми.

42. Докажите, что точка пересечения диагоналей квадрата является центром окружности, описанной около квадрата, т. е. проходящей через все его вершины.

43. Докажите, что точка пересечения диагоналей квадрата является центром окружности, вписанной в квадрат, т. е. касающейся всех его сторон.

44*. Постройте квадрат по сумме длин всех его сторон и диагоналей.

45. Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четырехугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали равны и пересекаются под прямым углом. Достаточна ли такая проверка?

46. Хотят убедиться, что кусок материала в форме четырехугольника имеет форму квадрата. Для этого материю дважды перегибают сначала по одной, а потом по другой диагонали. Образующиеся треугольники оба раза точно совмещаются. Доказывает ли такая проверка, что этот кусок материи действительно имеет форму квадрата?

47. Сторона квадратной шайбы равна 60 мм. Какой длины должен быть лист стали, чтобы из него можно было сделать 50 шайб? Ширина листа 300 мм.

48. Заготовлены одинаковые по длине и ширине рейки в форме прямоугольников. Как обрезать концы реек под углом в 45°, не используя углоизмерительного инструмента, чтобы из них можно было сложить раму?

49. Имеется 9 палочек различных длин: 1 см, 2 см, ..., 9 см. С какими сторонами и сколькими способами можно составить квадраты из этих палочек? (Указание: все палочки использовать не обязательно; способы составления одного и того же квадрата считаются разными, если использованы разные наборы палочек.)

50. Дано: MK — средняя линия треугольника ABC, параллельная AC, D — произвольная точка основания AC, E — точка пересечения MK с BD. Докажите, что $BE = ED$.

51. Даны угол AOB и точка M вне его. Проведите через точку M прямую, пересекающую стороны угла так, чтобы отрезок MK делился точкой C пополам (рис. 4).

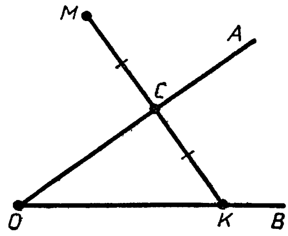


Рис. 4

52. Даны угол AOB и точка K внутри него. Проведите через точку K отрезок CD так, чтобы точки C и D лежали на сторонах угла и отрезок CD делился точкой K пополам (рис. 5).

53. Докажите, что в любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон, делятся точкой их пересечения пополам.

54*. На каждой стороне одного параллелограмма лежит одна из вершин другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей у этих параллелограммов совпадают.

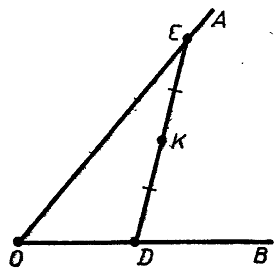


Рис. 5

55. Используя свойство средней линии треугольника, найдите расстояние между двумя недоступными точками A и B.

56. Найдите расстояние до недоступной точки, используя свойство средней линии треугольника.

57. Одна из вершин земельного участка треугольной формы недоступна. Как измерить периметр этого участка?

58. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 4 см. Через вершину B проведена прямая, параллельная стороне CD. Периметр образовавшегося треугольника равен 12 см. Найдите периметр трапеции.

59. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB, основание BC равно другой боковой стороне, угол A равен 40°. Найдите остальные углы трапеции.

60. В равнобокой трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 132 см, а основания относятся как 2 : 5. Найдите среднюю линию трапеции.

61. Если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются в точке, лежащей на другом основании, то второе основание трапеции равно сумме длин боковых сторон трапеции. Докажите.

62. Докажите, что у равнобокой трапеции сумма противолежащих углов равна 180°.

63. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то она равнобокая.

64. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению задачи 62.

65. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

Задачи к § 7

66. Периметр квадрата равен 4 см. Найдите его диагональ.

67. Высота равностороннего треугольника равна 3 дм. Найдите его сторону.

68. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 см, а сумма катетов — 7 см. Найдите катеты.

69. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см, а высота, опущенная на основание,— 6 см. Найдите стороны треугольника.

70. Периметр прямоугольного треугольника равен 10 см, а один из катетов — 4 см. Найдите другой катет и гипотенузу.

71. Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 3 м, а отношение гипотенузы к большему катету равно 5 : 4. Найдите стороны треугольника.

72. Периметр прямоугольника равен 28 м, а диагональ — 10 м. Найдите стороны прямоугольника.

73. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. Докажите что высота, опущенная из вершины прямого угла, равняется $\frac{ab}{c}$.

74. В прямоугольной трапеции (одна боковая сторона перпендикулярна основаниям трапеции) один из углов равен 135°, средняя линия равна 18 см, а основания относятся как 1 : 8. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

75*. Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Пусть биссектриса острого угла A прямоугольного треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр к катету BC в точке D (рис. 6). Опустим из точки D перпендикуляры DQ на гипотенузу AB и DR — на катет AC. $\triangle ADQ = \triangle ADR$ по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $DQ = DR$ и $AQ = AR$. $\triangle DCR = \triangle DBQ$ по гипотенузе и катету ($DB = CD$ по теореме 5.6, а $DQ = DR$ по доказанному). Из равенства треугольников следует, что $BQ = CR$. Отсюда для гипотенузы имеем: $AB = AQ + BQ = AR + CR = AC$ (по доказанному $AQ = AR$ и $BQ = CR$), т. е. гипотенуза равна катету, что противоречит следствию из теоремы Пифагора.

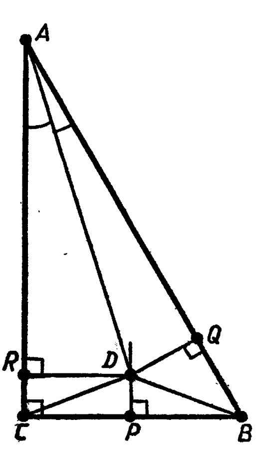


Рис. 6

76. Для установки мачты телевизионной антенны изготовлены тросы длиной $l = 20{,}2$ м. Тросы крепятся к этой мачте на высоте $h = 18{,}62$ м. Определите, на каком расстоянии от основания мачты нужно укрепить концы троса.

77. Параллельно прямой дороге на

расстоянии 500 м от нее расположена цепь стрелков. Расстояние между крайними стрелками равно 120 м, дальность полета пули равна 2800 м. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цепи?

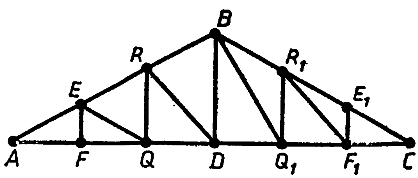


Рис. 7

78. Имеется цилиндрическая заготовка большого диаметра. Как вычислить диаметр этой заготовки, пользуясь штангенциркулем?

79. Строительная ферма имеет ноги AB и BC по 8,5 м, пролет AC в 15 м. Определите высоту фермы BD и высоту всех ее вертикальных стоек, которые делят пролет AC пятами строительных ног на 6 равных частей (рис. 7).

80. 12 апреля 1961 г. Юрий Гагарин на космическом корабле «Восток» пролетел над Землей на высоте 327 км. Чему было в это время равно расстояние от корабля «Восток» до наиболее удаленных видимых с него участков поверхности Земли? (Радиус Земли принять ≈ 6400 км.)

81. С вертолета на башню высотой 79,5 м был сброшен вымпел. В этот момент прямая, соединяющая наблюдателя и вертолет, образовывала с горизонтальной плоскостью угол $63°30'$, а прямая, соединяющая наблюдателя с верхушкой башни,— угол $20°45'$. На какой высоте над землей находился вертолет?

82. На прямолинейном железнодорожном пути находятся два пункта A и B. Расстояние $AB = 470$ м. Пункт B расположен на 8 м выше пункта A. Найдите угол подъема пути на участке AB.

83. На рисунке 8 изображена схема погрузочного крана, стрела BC которого равна 9 м и может иметь максимальное отклонение от вертикальной колонны AB на угол 64°. Определите радиус действия крана.

84. Из пункта A вышел крейсер со скоростью 36 км/ч. Через 2 ч крейсеру по радио был дан приказ изменить курс на 90° влево и одновременно из пункта A для встречи с крейсером вышел катер со скоростью 54 км/ч. Под каким углом к первоначальному направлению крейсера должен идти катер, чтобы встретиться с ним в кратчайший срок?

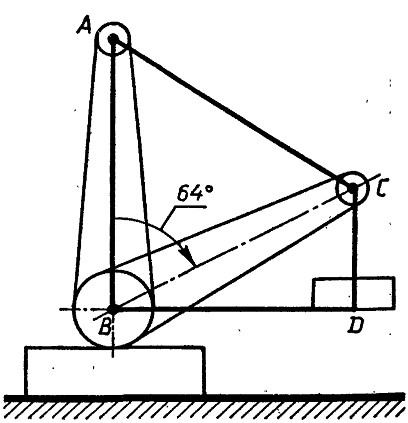


Рис. 8

85. Движущаяся лестница (эскалатор) Московского метрополитена имеет 170 ступенек от пола наземного вестибюля до пола подземной станции. Ширина на ступенек 40 см, высота 20 см. Определите: а) длину лестницы; б) угол наклона ее; в) глубину станции по вертикали.

86. В 800 м за точкой отрыва самолета от земли расположены деревья высотой 20 м. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревьев?

87. Между двумя площадками лестничной клетки требуется уложить на металлических балках бетонные ступени. Под каким углом к горизонту следует закрепить балки, если подъем ступени равен 15,5 см, а ее ширина — 32,5 см?

88. Для определения высоты облака от поверхности Земли в ночное время применяется «потолочный прожектор», лучи которого направлены по вертикали и оставляют белое пятно на облаке. Найти высоту облака, если угол между направлением на освещенную часть облака и направлением на прожектор равен α, а расстояние от наблюдателя до прожектора равно a.

89. Прожектор, расположенный в 1200 м от батареи, обнаружил зенитным лучом (вертикальным) неприятельский самолет. Наблюдатель с батареи в то же время увидел этот самолет под углом $25°17'$. Определите, на какой высоте летел самолет и на каком расстоянии от батареи.

90. Упростите выражение: а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1$;
б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; в) $(1 + \mathrm{ctg}^3\alpha)\sin^2\alpha - \mathrm{ctg}^4\alpha$;
г) $(1 - \mathrm{tg}^4\alpha)\cos^2\alpha$; д) $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$;
е) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$; ж) $\dfrac{\sin^2\alpha\,(1 - \mathrm{ctg}^2\alpha)^2 + \cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}$.

Задачи к § 8

91. Определите вид четырехугольника $ABCD$ (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат), если:
а) A (0, 8), B (—6, 0), C (2, —6), D (8, 2);
б) A (0, 0), B (1, 2), C (2, 2), D (1, 0);
в) A (2, 3), B (3, 5), C (4, 3), D (3, 1);
г) A (1, 2), B (2, 4), C (6, 2), D (5, 0).

92. Составьте уравнение окружности, которая проходит через точку (2, 2) и касается оси x и прямой $y = 4$.

93. Составьте уравнение окружности, которая касается осей x и y и прямой $x = 6$.

94. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек (0, 0) и (a, b).

95. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:
а) $5x - 7y - 20 = 0$ и $7x - 10y + 15 = 0$;
б) $2x + 3y - 7 = 0$ и $4x + 6y + 11 = 0$;
в) $2x - y = 0$ и $x + 0{,}5y = 0$.

96. Окружность радиуса 3 см касается двух параллельных прямых. Чему равно расстояние между этими прямыми?

97. Расстояние от вершины угла до точек касания его сторон с вписанной в него окружностью равно радиусу этой окружности. Чему равен данный угол?

98. Окружность с центром в точке $(-2, 4)$ касается оси x. В скольких точках эта окружность пересекает ось y?

99. Окружность с центром в точке $(5, -3)$ касается оси y. В скольких точках пересекает она ось x?

100. Даны прямоугольный треугольник с катетами a и b и окружность радиуса R с центром в вершине прямого угла этого треугольника. Пересекает ли окружность прямую, содержащую гипотенузу данного треугольника, если: а) $a = 3$, $b = 4$, $R = 2{,}5$; б) $a = 20$, $b = 15$, $R = 12$; в) $a = 5$, $b = 12$, $R = 4$?

Задачи к § 9

101. Расстояние между точкам A и B равно 7 см, а между точками A_1 и B_1 — 8 см. Могут ли точки A_1 и B_1 быть симметричными точкам A и B относительно: а) точки; б) прямой?

102. Могут ли основания трапеции быть симметричными друг другу фигурами относительно: а) точки; б) прямой?

103. Докажите, что если у четырехугольника есть центр симметрии, то он является параллелограммом.

104. Прямые a и b параллельны, а прямые a_1 и b_1 пересекаются. Существует ли движение, при котором прямые a_1 и b_1 переходили бы в прямые a и b?

105. Докажите, что при движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

106. Могут ли параллелограмм и трапеция быть симметричными друг другу относительно: а) точки; б) прямой?

107. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке M. Точки P, Q и R — середины отрезков AM, BM и CM соответственно. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle PQR$.

108. Известны две вершины параллелограмма, вписанного в данный четырехугольник (на каждой стороне четырехугольника лежит по одной вершине параллелограмма). Постройте этот параллелограмм, если две его известные вершины являются противолежащими.

109*. На окружностях даны точки A и B, на прямой l — точка M. Найдите на окружности такую точку X, чтобы прямые AX и BX пересекали прямую l в точках, находящихся на равных расстояниях от точки M.

110. Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр и перпендикулярна этим хордам.

111. Окружность F_1 пересекает концентрические окружности F_2 и F_3 в точках A, B и C, D соответственно. Докажите, что хорды AB и CD параллельны.

112. Даны две концентрические окружности. Постройте ромб, отличный от квадрата, чтобы: а) две вершины ромба принадлежали одной окружности, а две другие — другой; б) три вершины ромба принадлежали одной окружности, а одна — другой.

113. Докажите, что точка пересечения прямых, которые содержат боковые стороны равнобокой трапеции, точка пересечения ее диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

114. Постройте квадрат $ABCD$ по его центру O (точка пересечения диагоналей) и точкам M и N, лежащим на прямых AB и BC соответственно ($OM \neq ON$).

115*. Постройте такой равносторонний треугольник, чтобы одна его вершина совпадала с данной точкой O, а две другие принадлежали двум данным окружностям.

116*. Через данную точку внутри окружности проведите хорду данной длины (меньшей диаметра окружности).

117*. Дан квадрат. Через центр этого квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые (не обязательно проходящие через вершины квадрата). Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

118. Докажите, что пересекающиеся прямые переходят при преобразовании подобия в пересекающиеся прямые.

119. Докажите, что преобразование, обратное преобразованию подобия, является преобразованием подобия.

120. Докажите, что при преобразовании подобия параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

121. Даны параллельные отрезки AB и A_1B_1 ($AB \neq A_1B_1$). Найдите центр гомотетии, при которой отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1.

122. Отрезки, соединяющие данную точку O с точками данной прямой, разделены в одном и том же отношении (считая от точки O). Докажите, что точки деления лежат на одной прямой.

123. Дан угол и внутри него — точка M. Проведите через точку M прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри угла, делился точкой M в отношении 1:2.

124. Дан угол и внутри него — точка M. Проведите через M прямую так, чтобы ее отрезок с концами A и B на сторонах угла делился точкой M в данном отношении.

125*. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся прямой AB в точке M. Пусть MM_1 — диаметр этой окружности. Докажите, что прямая CM_1 пересекает прямую AB в такой точке C_1, что $AC + AC_1 = BC + BC_1$.

126*. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Прямая a пересекает окружности в точках M, N, P и Q, расположенных именно в такой последовательности. Докажите, что $\angle MAN = \angle PAQ$.

127. Используя подобие, докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

128. Основания трапеции равны a и b, сумма углов при основании a равна 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

129. Дан треугольник ABC. При каком условии можно провести через вершину C прямую p, пересекающую отрезок AB в точке C_1 так, чтобы треугольники ACC_1 и BCC_1 были подобны?

130. Может ли медиана треугольника рассечь его на два неравных подобных треугольника?

131. Определите углы равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании этого треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному.

132. Дан равнобедренный треугольник ABC: $AB = BC$. Высоты AM и BN не равны. Докажите, что треугольники AMC и ABN подобны.

133. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC.

134. Дан остроугольный треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1. Подсчитайте, сколько образовалось при этом подобных друг другу треугольников.

135. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что $A_1H \cdot A_1A = BA_1 \cdot CA_1$, $B_1H \cdot B_1B = CB_1 \cdot AB_1$.

136. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

137*. Постройте треугольник по трем его высотам.

138*. Постройте треугольник по данной высоте, углу при вершине и отношению длин отрезков, на которые высота делит основание.

139. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к окружности, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AC и BC соответственно в точках M и N. Выразите отрезок MN через стороны a, b и c данного треугольника.

140. Через точку K пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AC и BC соответственно в точках D и E. Докажите, что $DE = \frac{c(a+b)}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника.

141. Биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает биссектрису CC_1 в точке K. Докажите, что точка K делит биссектрису CC_1 в отношении $CK : KC_1$, равном отношению $(a+b) : c$, где a, b, c — стороны треугольника.

142. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC в точке их пересечения делятся в равных отношениях, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

143. Через основание C_1 биссектрисы CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная AC и пересекающая BC в точке D. Выразите отрезок CD через стороны треугольника a, b и c.

144*. Дан треугольник ABC, у которого $\angle B = 90° + \angle A$.

Докажите, что стороны a, b и c этого треугольника удовлетворяют соотношению $(b^2-a^2)^2=c^2(a^2+b^2)$.

145. Дан треугольник ABC, у которого угол B в два раза больше угла A. Найдите зависимость между сторонами a, b и c этого треугольника.

146. Докажите, что расстояние d от точки A окружности радиуса R до прямой, содержащей ее хорду BC, вычисляется по формуле

$$d=\frac{AB\cdot AC}{2R}.$$

147. Касательные в точках A и B окружности пересекаются в точке S. Докажите, что расстояние от любой точки окружности до прямой AB есть среднее пропорциональное ее расстояний до прямых AS и BS.

148. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что произведения расстояний от любой точки M окружности до пар прямых AC и BD, BC и AD, CD и AB равны.

149. К окружности проведены две параллельные касательные a и b. Третья касательная пересекает a и b соответственно в точках A и B и касается окружности в точке C. Вычислите расстояние между a и b, если $AC=m$, $BC=n$.

150. Даны два подобных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, $\angle C=\angle C_1=90°$. Докажите, что $aa_1+bb_1=cc_1$, где a, b, c соответственно катеты и гипотенуза первого треугольника, а a_1, b_1, c_1 — второго.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-1

Для выполнения данной работы применяется весь теоретический материал пункта «Параллелограмм», что создает хорошие предпосылки для повторения и закрепления определения и свойств параллелограмма и развития у учащихся навыков по их использованию в решениях задач. На этом должен быть сделан акцент и при решении задач на построение (вторые задания), в связи с чем учащиеся при письменном оформлении решения могут опускать анализ задачи и использовать для построения линейку с делениями, угольник и транспортир.

При анализе решения задач на построение учитель должен учесть различные способы построения и соответственно разные способы обоснования.

Вар. 1. **1.** Периметр параллелограмма равен 22, $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$.

Вар. 2. **1.** 72°, 108°, 72°, 108°.

Вар. 3. **1.** 18 см, 43 см, 18 см, 43 см.

Вар. 4. **1.** $\angle A = \angle C = 70°$, $\angle B = \angle D = 110°$.

С-2

Возможны два способа решения вторых заданий в вариантах 1 — 3. Первый способ основан на свойстве диагонали ромба как биссектрисы его угла (остальные три угла находятся так же, как углы параллелограмма, когда известен один из его углов). Второй способ основан на свойстве перпендикулярности диагоналей ромба (наряду с их свойством как биссектрис углов ромба).

Вар. 1. **1.** 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. **2.** 80°, 80°, 100°, 100°.

Вар. 2. **1.** 12 см, 36 см, 12 см, 36 см. **2.** 70°, 70°, 110°, 110°.

Вар. 3. **1.** 8 см. Указание. Воспользоваться № 35 § 4 (с. 44) учебника. **2.** 36°, 144°, 36°, 144°.

Вар. 4. **1.** 20 см или 28 см. Указание. Надо рассмотреть два случая, так как в условии задачи не сказано, какая из частей (длиной 2 см или 6 см) прилегает к вершине B. **2.** 60°, 60°, 120°, 120°. Указание. Диагональ, равная стороне, разбивает ромб на два равносторонних треугольника.

С-3

Вар. 1. **2.** 9 см.

Вар. 2. **2.** 3, 35 см.

Вар. 3. **2.** 18 см.

Вар. 4. **1.** Указание. Разделить искомый отрезок на 5 равных частей и провести через точки деления прямые, параллельные одной из сторон параллелограмма. **2.** 14 см.

С-4

Вар. 1. **1.** 134°, 108°. **2.** 8 см.

Вар. 2. **1.** 60°, 60°, 120°, 120°. **2.** 12 см, 24 см.

Вар. 3. **1.** 75°, 75°, 105°, 105°. **2.** 12 см, 32 см.

Вар. 4. **1.** $\angle B = 130°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 80°$. **2.** Указание. Продолжить данный отрезок до пересечения с продолжением одной из боковых сторон трапеции и воспользоваться теоремой Фалеса.

С-5

Данная работа охватывает практически все содержание материала § 6 учебного пособия, причем примерно равноценными являются два первых и два последних ее варианта. При выполнении первых заданий (во всех вариантах) нужно давать краткие обоснования.

Вар. 1. **1.** 45°, 45°, 135°, 135°. **3.** 6 см, 4 см, 2 см.
Вар. 2. **1.** 60°, 60°, 120°, 120°. **3.** 12 см, 9 см, 6 см.
Вар. 3. **1.** 45°, 45°, 135°, 135°. **3.** 2 см, 4 см.
Вар. 4. **1.** 45°, 45°, 135°, 135°. **3.** 1 см, 3 см.

С-6

Работа является подготовительной к изучению теоремы 7.1. Цель ее — подвести учащихся к отчетливому понимаю формулировки этой теоремы. Выполняя предложенные задания, учащиеся должны сделать вывод (сами или с помощью учителя), что если у двух прямоугольных треугольников есть равные острые углы, то косинусы этих углов равны, т. е. что косинус угла не зависит от размеров треугольника. Другими словами, что косинус (острого) угла прямоугольного треугольника определяется самим углом и зависит только от градусной меры угла. Задания первого варианта самые простые (вычисляемое отношение близко к $\frac{1}{2}$), а последнего — наиболее сложные (указанное отношение вычисляется при произвольном выборе точек B_1 и B_2). Задания этой работы могут быть предложены в качестве домашней практической работы перед изучением теоремы 7.1.

С-7

Вар. 1. **1.** 17 см. **2.** 4 см.
Вар. 2. **1.** 42 см. **2.** 35 см.
Вар. 3. **1.** 25 см. **2.** 5 см.
Вар. 4. **1.** 15 см. **2.** $4\sqrt{3}$ см.

С-8

Работа посвящена развитию у учащихся навыков работы с таблицами синусов, косинусов и тангенсов по приведенному в учебном пособии образцу (см. с. 84—85).

Вар. 1. **1.** $\sin 65° = 0{,}9063$, $\cos 65° = 0{,}4226$, $\operatorname{tg} 65° = 2{,}145$; $\sin 65°12' = 0{,}9078$, $\cos 65°12' = 0{,}4195$, $\operatorname{tg} 65°12' = 2{,}164$; $\sin 65°15' = 0{,}9082$, $\cos 65°15' = 0{,}4187$, $\operatorname{tg} 65°15' = 2{,}169$. **2.** а) $\alpha = 20°30'$; б) $\alpha = 54°12'$; в) $\alpha = 45°$.

Вар. 2. **1.** $\sin 44°42' = 0{,}7034$, $\cos 44°42' = 0{,}7108$, $\operatorname{tg} 44°42' = 0{,}9896$; $\sin 44°40' = 0{,}7030$, $\cos 44°40' = 0{,}7112$, $\operatorname{tg} 44°40' = 0{,}9885$; $\sin 70°25' = 0{,}9422$, $\cos 70°25' = 0{,}3352$, $\operatorname{tg} 70°25' = 2{,}811$. **2.** а) $\alpha = 30°14'$; б) $\alpha = 34°50'$; в) $\alpha = 30°$.

Вар. 3. **1.** $\sin 56°18' = 0{,}8320$, $\cos 56°18' = 0{,}5548$, $\operatorname{tg} 56°18' = 1{,}4994$; $\sin 56°22' = 0{,}8326$, $\cos 56°22' = 0{,}5539$, $\operatorname{tg} 56°22' = 1{,}5032$; $\sin 25°47' = 0{,}4349$, $\cos 25°47' = 0{,}9004$, $\operatorname{tg} 25°47' = 0{,}4830$. **2.** а) $\alpha = 67°15'$; б) $\alpha = 79°28'$; в) $\alpha = 45°$.

Вар. 4. **1.** $\sin 35°23' = 0{,}5791$, $\cos 35°23' = 0{,}8153$, $\operatorname{tg} 35°23' = 0{,}7103$; $\sin 68°25' = 0{,}9299$, $\cos 68°25' = 0{,}3678$, $\operatorname{tg} 68°25' = 2{,}528$; $\sin 82°58' = 0{,}9924$, $\cos 82°58' = 0{,}1225$, $\operatorname{tg} 82°58' = 8{,}105$. **2.** а) $\alpha = 50°22'$; б) $\alpha = 84°28'$; в) $\alpha = 40°31'$.

С-9

При выполнении заданий данной работы, кроме значений тригонометрических функций некоторых углов, используются также соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, выведенные ранее (см. учебное пособие, с. 83).

Вар. 1. **1.** $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $BC = \frac{1}{2}$ см. **2.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$ см.

Вар. 2. **1.** $AB = 6$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см. **2.** 8 см, $4\sqrt{2}$ см, $4\sqrt{2}$ см.

Вар. 3. **1.** $AB = 8$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см. **2.** 6 см, $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см.

Вар. 4. **1.** $\sqrt{3}$ см. Указание. Воспользоваться тем, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной около него окружности. **2.** $\sqrt{3} + 1$ см.

С-10

Во вторых заданиях положительный ответ пока не может быть обоснован, так как это связано с вопросом о пересечении двух окружностей, который решается с помощью метода координат (см. учебное пособие, с. 98—101, № 34 и 35 § 8). В предложенной задаче обоснование проводится способом от противного (получается противоречие с неравенством треугольника).

Вар. 1. **1.** $AB + BC > AC$, $AB + AC > BC$ или $AC + BC > AB$, причем всюду строгое неравенство, так как точки A, B и C, будучи вершинами треугольника, не лежат на одной прямой. **2.** Не может.

Вар. 2. **1** и **2.** Не может.

Вар. 3. **1** и **2.** Не может.

Вар. 4. **1.** Указание. Воспользоваться тем, что в случае, когда точки не лежат на одной прямой, в неравенстве треугольника — строгое неравенство. **2.** Указание. Записать неравенство треугольника для двух треугольников, сторонами которых являются диагонали параллелограмма, и почлененно сложить их.

С-11

В работу включены задания на основные соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, включая теорему Пифагора и ее следствия, решение прямоугольных треугольников и другие вопросы § 7 учебного пособия. Равноценными являются два первых и два последних варианта работы. При решении треугольников вычисление линейных размеров (сторон) следует проводить с точностью до сотых, а углов — с точностью до 1/60 градуса, т. е. до 1′. Это позволяет сосредоточить главное внимание учащихся на геометрической стороне дела.

Вар. 1. **1.** Указание. Воспользоваться следствием теоремы Пифагора: у прямоугольного треугольника катет меньше гипотенузы. **2.** $CB = 3$ см, $AB = 5$ см. **3.** $a = 7{,}46$ см, $b = 10{,}65$ см, $\beta = 65°$.

Вар. 2. **1.** См. указание к заданию 1 варианта 1. **2.** $AC = 12$ см, $AB = 13$ см. **3.** $b = 15{,}55$ см, $c = 20{,}92$ см, $\beta = 48°$.

Вар. 3. **1.** Указание. Воспользоваться неравенством треугольника (дважды). **2.** $AB = 19\frac{4}{15}$ см, $BC = 9\frac{1}{15}$ см, $AC = 17$ см. **3.** $b = 17{,}55$ см, $\alpha = 12°50'$, $\beta = 77°10'$.

Вар. 4. **1.** См. указание к заданию 1 варианта 3. **2.** $AB = 26\frac{1}{24}$ см, $BC = 25$ см, $AC = 7\frac{7}{24}$ см. **3.** $c = 11{,}18$ см, $\alpha = 26°34'$, $\beta = 63°26'$

С-12

Связь между понятиями параллельности и перпендикулярности прямых особенно ощущается при изучении темы «Декартовы координаты на плоскости». Однако это не означает, что постоянные переходы от параллельности к перпендикулярности и наоборот на основе следствий из теорем 4.2 и 4.3 (см. учебное пособие, с. 40) каждый раз необходимо логически обосновывать. Дело в том, что в процессе изучения предшествующего материала, в частности содержащегося в § 4 и 6, у учащихся накопилось достаточно опыта работы с этими понятиями. А значит, рассуждения, касающиеся их, могут приводиться теперь в свернутом виде, тем более что это необходимо для создания благоприятных условий для изучения нового материала. Сделанное замечание имеет прямое отношение и к данной работе, в особенности к ее первым заданиям.

Вар. 1. **2.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Вар. 2. **1.** 2 (расстояние до оси x равно абсолютной величине ординаты). **2.** (2, −2).

Вар. 3. **1.** 2 (расстояние до оси y равно абсолютной величине абсциссы). **2.** (−1, 2).

Вар. 4. **1.** Указание. См. решение задачи 9 в учебном пособии (с. 96). **2.** (2, −4). Указание. См. решение задачи 17 в учебном пособии (с. 97).

С-13

Формула расстояния между двумя точками, заданными своими координатами, является основой при выводе уравнения окружности и прямой. Этим и объясняется компоновка пунктов учебного пособия для данной работы.

Вар. 1. **1.** $\sqrt{26}$. **2.** (0, 3) и (0, −3).

Вар. 2. **1.** $(x+1)^2+(y-4)^2=16$. **2.** $\left(1\frac{5}{7}, 1\frac{13}{14}\right)$.

Вар. 3. **1.** $(x+3)^2+(y-2)^2=9$. **2.** $\left(\frac{13}{15}, -2\frac{2}{5}\right)$.

Вар. 4. **1.** $(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Указание. Обратите внимание на то, что данные точки являются вершинами прямоугольного треугольника, для которого положение центра описанной окружности известно. **2.** $3x+5y+4=0$. Указание. См. решение задачи 47 в учебном пособии (с. 101—102).

С-14

При выяснении особенностей в расположении прямой относительно осей координат рассматриваются все возможные случаи обращения в нуль коэффициентов в ее уравнении $ax+by+c=0$ (см. учебное пособие, с. 102). Это обстоятельство и служит основанием для того, чтобы сразу (без вывода) записывать вид уравнения прямой, если известны особенности в ее расположении относительно системы координат (прямая параллельна оси x, оси y или проходит через начало координат). Точно так же при исследовании вопроса о пересечении прямой с окружностью (см. учебное пособие, с. 104) рассматриваются все возможные случаи соотношений между радиусом окружности R и расстоянием d от ее центра до прямой ($R>d$, $R=d$, $R<d$). Значит, если соотношение между R и d известно, то можно сделать соответствующее заключение о взаимном расположении прямой и окружности, и обратно, если задано взаимное расположение прямой и окружности, то можно сделать вывод о соотношении между R и d. Из этого и следует исходить при выполнении заданий данной работы. В случае затруднений учащиеся могут в необходимых случаях прибегать к аналитическому решению поставленного вопроса.

Вар. 1. **1.** $x=-1$. **2.** Окружность и прямая касаются ($R=6$, $d=6$).

Вар. 2. **1.** $y=-3$. **2.** Не пересекает ($R=1$, $d=2$).

Вар. 3. **1.** $x+2y=0$. **2.** Не пересекает ($R=2$, $d=3$).

Вар. 4. **1.** 45° и 135°. Указание. Найти угловой коэффициент данной прямой. **2.** Указание. Чтобы сравнить R и d, нужно воспользоваться свойством перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки к прямой.

С-15

Основные тригонометрические тождества выводятся в учебном пособии (см. с. 85—86) для углов в прямоугольном треугольнике, т. е. для острых углов. Однако, поскольку в эти тождества синус, косинус и тангенс входят только в квадрате, а значения тригонометрических функций для острых и тупых углов, составляющих в сумме 180°, могут отличаться только знаком (по теореме 8.1), то они остаются справедливыми для любых углов от 0° до 180°. Поэтому ими можно пользоваться при выполнении заданий данной работы свободно, не требуя обоснований от учащихся.

Вар. 1. **1.** $\sin 145° = 0,5736$, $\cos 145° = -0,8192$, $\operatorname{tg} 145° = -0,7002$; $\sin 99°40' = 0,9858$, $\cos 99°40' = -0,1679$, $\operatorname{tg} 99°40' = -5,871$. **2.** $\cos\alpha = -0,6$.

Вар. 2. **1.** $\sin 133° = 0,7314$, $\cos 133° = -0,6820$, $\operatorname{tg} 133° = -1,0724$; $\sin 105°10' = 0,9652$, $\cos 105°10' = -0,2616$, $\operatorname{tg} 105°10' = -3,689$. **2.** $\sin\alpha = \frac{15}{17}$.

Вар. 3. **1.** $\sin 127° = 0,7986$, $\cos 127° = -0,6018$, $\operatorname{tg} 127° = -1,3270$; $\sin 100°15' = 0,9841$, $\cos 100°15' = -0,1779$, $\operatorname{tg} 100°15' = -5,530$. **2.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

Вар. 4. **1.** $\sin 92°40' = 0,9989$, $\cos 92°40' = -0,0465$, $\operatorname{tg} 92°40' = -21,47$; $\sin 152°17' = 0,4651$, $\cos 152°17' = -0,8853$, $\operatorname{tg} 152°17' = -0,5254$. **2.** $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{40}{9}$.

С-16

Работа охватывает практически все содержание учебного материала § 8 учебного пособия, причем два первых и два последних ее варианта являются примерно равноценными. Выполняя ее, учащиеся должны шире использовать геометрические соотношения, а не увлекаться аналитическими выкладками, которые могут оказаться для них затруднительными.

Вар. 1. **1.** $AD = 5$, $3x + 4y - 2 = 0$. **2.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Указание. Точки, через которые должна проходить окружность, являются вершинами прямоугольного треугольника, для которого положение центра описанной окружности известно. 3. Указание. Воспользоваться теоремой 8.1.

Вар. 2. **1.** $BD = 2$, $y - 2 = 0$. **2.** $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$. **3.** Указание. Воспользоваться теоремой 8.1.

Вар. 3. **1.** $B_1C_1 = 5$, $3x + 4y = 0$. **2.** $(x+2)^2 + (y \pm 2)^2 = 4$. Указание. Диаметр окружности равен расстоянию между осью y и параллельной ей прямой $x = -4$, а центр находится на биссектрисе второй или третьей четверти. **3.** Указание. Найти расстояние от центра данной окружности до прямой $y = 3$ и сравнить их.

Вар. 4. **1.** $A_1B_1 = 5$, $4x - 3y = 0$. **2.** $(x \pm 3)^2 + (y-3)^2 = 9$. Указание. Диаметр окружности равен расстоянию между осью x и параллельной ей прямой $y = 6$, а центр находится на биссектрисе первой или второй четверти. **3.** См. указание к заданию 3 варианта 3.

С-17

Эта самостоятельная работа закрепляет и контролирует навыки в построении образов точек, в которые переходят данные точки при симметрии относительно точки, прямой и при гомотетии. Выполнение заданий во многом связано с выбором как данных точек, так и центра или оси симметрии и центра гомотетии. Можно заранее дать учащимся рисунок или выполнять задания на готовом чертеже.

Вар. 1. **1.** Указание. Точка C может принадлежать прямой a или не принадлежать ей.

Вар. 2. **1.** Указание. Следует обосновать, что точка B' совпадает с точкой D. **2.** Указание. Решение сводится к делению отрезков OA и OB пополам.

Вар. 3. **1.** См. указание к заданию 1 варианта 2. **2.** Указание. На полупрямых OA и OB следует отложить отрезки от точек A и B, равные половинам отрезков OA и OB.

Вар. 4. **1.** Центра симметрии у треугольника быть не может. Ось симметрии есть у равнобедренного треугольника. **2.** Деление на 3 части можно выполнить с использованием теоремы Фалеса.

С-18

В этой работе рассматривается построение образов некоторых фигур с использованием свойств движений, ссылки на которые желательно делать при выполнении работы. Кроме этого, здесь контролируются знания учащихся о наличии у некоторых геометрических фигур (луч, квадрат, ромб) осей и центров симметрии.

Вар. 1. **1.** Указание. При выполнении задания следует сослаться на свойство движения (теорема 9.3). **2.** Осью симметрии луча является прямая, которой он принадлежит.

Вар. 2. **2.** Квадрат имеет четыре оси симметрии: прямые, которым принадлежат его диагонали, и прямые, являющиеся серединными перпендикулярами к его сторонам.

Вар. 3. **2.** Ромб имеет две оси симметрии — прямые, которым принадлежат его диагонали. Если данный ромб — квадрат, то число осей симметрии равно четырем.

Вар. 4. **2.** Центр и оси симметрии имеют одновременно прямоугольник и ромб.

С-19

В этой работе рассматриваются свойства преобразования подобия и контролируются навыки построения образов некоторых фигур при гомотетии, при этом гомотетию мы рассматриваем как преобразование подобия с использованием всех свойств этих преобразований. Кроме этого, во вторых заданиях отрабатывается понятие подобных треугольников, их определение.

Вар. 1. **1.** Указание. Следует иметь в виду, что точка O может либо принадлежать лучу AB, либо не принадлежать ему. Учитель может заранее задать положение этой точки. **2.** Отношение соответственных сторон этих треугольников равно $k=\frac{4,6}{2,3}=2$, значит, стороны треугольника, подобного данному, равны соответственно 2, 5 см, 2,3 см, 1,25 см.

Вар. 2. **2.** 2,625 см, 1,875 см, 1,5 см.

Вар. 3. **2.** $\frac{7}{3}$ см, 3,5 см, $\frac{7}{4}$ см.

Вар. 4. **2.** Указание. Построить прямоугольный треугольник по известному отношению катета к гипотенузе, затем ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

С-20

Эта работа продолжает предыдущую. В ней отрабатывается понятие подобных треугольников, а также закрепляются признаки подобия треугольников.

Вар. 1. **1.** Для доказательства подобия треугольников можно проверить истинность следующих равенств: $\frac{7,5}{25}=\frac{7,2}{24}=\frac{6}{20}$. Они истинны, следовательно, стороны треугольников пропорциональны (III признак), а значит, треугольники подобны. **2.** Треугольники подобны по I признаку.

Вар. 2. **1.** 13,5 см, 18 см, 27 см. **2.** Биссектриса третьего угла треугольника отсекает от него треугольник с углами 54° и 18°, а тогда по I признаку этот треугольник подобен данному.

Вар. 3. **1.** 25 см, 30 см, 40 см. **2.** См. указание к задаче 2 варианта 2.

Вар. 4. **1.** $1\frac{7}{8}$ см.

С-21

Работа посвящена свойствам движения и преобразования подобия. При этом, как и в § 9 учебного пособия, основное внимание уделяется симметрии относительно точки и прямой, гомотетии, признакам подобия треугольников. Примерно равноценными являются два первых и два последних варианта работы. Первые задания выполняются с обоснованием, вторые и третьи — с указанием используемых признаков подобия треугольников.

Вар. 1. **1.** Указание. Воспользоваться теоремой 6.1.

Вар. 2. **1.** Указание. Воспользоваться теоремой 6.1 и определением ромба.

Вар. 3. **1.** Указание. Рассмотреть конфигурацию, которая использовалась при доказательстве теоремы 9.1, а затем применить признак параллельности прямых (теорема 4.2). **3.** $\frac{ab}{a+b}$.

Вар. 4. **1.** Указание. Рассмотреть треугольник, две вершины которого находятся на данной прямой, а третья — в центре гомотетии, и образ этого треугольника при гомотетии. **3.** Высоты обратно пропорциональны сторонам треугольника, к которым они проведены.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Д-1. Указание. Для построения четвертой вершины параллелограмма можно воспользоваться определением параллелограмма, его признаком (теорема 6.1) или утверждением задачи 15 из § 6, выражающей другой признак параллелограмма (по равенству и параллельности одной пары противолежащих сторон). Что касается единственности (дополнительный вопрос), то она вытекает из определения параллелограмма и аксиомы параллельных. При этом следует учитывать также и принятый способ обозначения, посредством чего задаются в задаче стороны параллелограмма (в отличие от сходной с нею по содержанию задачи 3 к § 6).

Д-2. Указание. Для доказательства достаточно установить, что все углы данного ромба прямые. Это можно сделать различными способами. Можно воспользоваться и более общим утверждением задачи 22 к § 6, если учащийся, конечно, знает его.

Д-3. Указание. Задание может быть предложено учащимся только после решения задачи 60 из учебного пособия 1984 г. издания. Доказательство утверждения 1 основывается на свойствах разбиения плоскости на две полуплоскости, которые используются и в доказательстве теоремы Фалеса. Утверждение 2 доказывается способом от противного: если точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD, то отрезки AD и BC пересекаются (см. задачу 60), что противоречит определению четырехугольника. Утверждение 3 также доказывается способом от противного. При этом утверждение 1, например, используется для установления того, что углы BAC и BAD отложены от полупрямой AB, в одну полуплоскость, а утверждение 2 — для получения противоречия с предположением. В результате доказательства утверждения 3 снова возникает уже настоящая ситуация задачи 60 (для параллельных прямых AB и CD и прямой AC, относительно которой точки B и D лежат в разных полуплоскостях). Чтобы облегчить учащимся выполнение этого задания, часть указаний дается в самом задании. В случае необходимости помощь отдельным учащимся можно усилить.

Д-4. Указание. Доказательство утверждений 2 — 4 опирается на утверждения, непосредственно предшествующие каждому из них. В частности, утверждение 2 (в точности повторяющее содержание задачи 53 к § 6) рекомендуется доказывать с помощью утверждения 1. Дело в том, что более известный способ его доказательства, заключающийся в проведении из вершин меньшего основания перпендикуляров к большему основанию, исходит, по существу, из недоказанного положения, что углы при большем основании трапеции острые. Поэтому для строгого обоснования этого утверждения предлагаемый в задании ход рассуждений предпочтительней. Задание представляет собой развитие темы задачи 50 § 6.

Д-5. Указание. Для доказательства утверждения 3 воспользоваться свойствами перпендикуляра и наклонных (утверждения 1 и 2). Последнее утверждение обосновывается с помощью предыдущего, для чего одна из данных точек соединяется отрезком с вершиной треугольника, лежащей против стороны, которой она принадлежит. В основу задания положена тема задачи 60 из § 7.

Д-6. Указание. Выполнение задания связано в основном с понятием синуса острого угла в прямоугольном треугольнике, чем и объясняется его название. Причем применяется оно точно так же, как понятие косинуса угла в доказательстве теоремы Пифагора (см. учебное пособие, с. 80). А именно, синус какого-нибудь угла находится двумя способами (из двух прямоугольных треугольников) и оба его выражения приравниваются. Такой метод, кстати, весьма удобен для решения задач типа 27 из § 7. Для того чтобы найти радиус окружности, вписанной в ромб, необходимо сначала определить и обосновать место ее центра, воспользовавшись свойством диагоналей ромба. **2.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **3.** $\frac{3}{2}a$. **4.** $2{,}4a$.

Д-7. Указание. Для решения задачи можно воспользоваться свойствами катета и высоты прямоугольного треугольника как средних пропорциональных величин (см. учебное пособие, с. 83). Одно из возможных решений можно получить, воспользовавшись соображениями, которые применялись при решении задачи 57 из § 6 учебного пособия, и утверждением задачи 35 из § 4.

Д-8. Указание. Утверждение 1 является непосредственным следствием неравенства треугольника (теорема 7.5). Чтобы доказать утверждение 2, надо прибавить a к обеим сторонам неравенства $a < b + c$. Задача 3 — разновидность задачи 63 из § 7. Для доказательства утверждения 4 следует провести в данном четырехугольнике диагональ, а затем дважды воспользоваться неравенством треугольника.

Д-9. Указание. Все части задания являются, по существу, этапами доказательства его последнего утверждения. Чтобы доказать, что данный четырехугольник есть квадрат, устанавливают сначала, что он является параллелограммом (диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам); затем — что параллелограмм является ромбом (стороны равны); и наконец — что ромб является квадратом (диагонали ромба равны). Впрочем, возможна и несколько другая последовательность логических шагов: четырехугольник, параллелограмм, прямоугольник, квадрат.

Д-10. Указание. Для доказательства утверждения 2 сначала надо найти радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами, а затем воспользоваться выводами п. «Уравнение окружности» (см. учебное пособие, с. 98—101). Точно так же следует поступить и при ответе на первый вопрос задания (для каждой пары окружностей, о пересечении которых спрашивается). Задания 3 и 4 дублируют задачи 35 и 38 из § 8.

Д-11. Указание. Для доказательства обоих утверждений можно или рассмотреть соответствующую систему уравнений, или воспользоваться выводами п. «Пересечения прямой с окружностью» (см. учебное пособие, с. 104).

Д-12. Указание. Доказательство всех утверждений задания опирается на то, что при движении прямая переходит в прямую, а отрезок — в отрезок. Поэтому и вершина переходит в вершину (как точка пересечения двух прямых). Утверждение 3 доказывается с помощью признака параллелограмма (теорема 6.1). Для доказательства утверждения 4 следует установить, что оси фигуры пересекаются под прямым углом (при симметрии относительно одной оси вторая ось должна переходить в себя, так как других осей симметрии по условию у фигуры нет), после чего можно выбрать их за оси координат и показать, что начало координат является центром симметрии данной фигуры.

Д-13. Указание. Первые два утверждения, являющиеся простыми следствиями определения преобразования подобия и теоремы 9.4, служат в качестве подготовительных к выполнению двух последующих заданий. Для выполнения задания 3 сначала надо вписать ромб в отмеченный угол треугольника так, чтобы четвертая его вершина не лежала на противолежащей стороне треугольника, что просто сделать; а затем применить гомотетию с центром в вершине этого угла, чтобы «вывести» ее на эту сторону. Аналогичные соображения применяются также при выполнении задания 4. В основу задания положена тема задачи 38 из § 9.

Д-14. Указание. Воспользоваться свойством средней линии треугольника (теорема 6.8) и противолежащих углов параллелограмма (теорема 6.3).

Д-15. Указание. Чтобы найти стороны ромба, вписанного в треугольник, надо рассмотреть какую-нибудь пару образовавшихся при этом подобных треугольников. Для ответа на дополнительный вопрос следует учесть, что биссектриса треугольника является диагональю вписанного в него ромба. Задание можно разбить на варианты (по числу возможных случаев), предложив учащимся в каждом из них найти сторону ромба несколькими способами. В основу задания положена задача 66 из § 9.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

1. Воспользоваться теоремой 6.1.

2. Воспользоваться признаком параллельности прямых (теорема 4.2).

3. Три решения: 14 см, 10 см, 12 см.

4. Три решения: 18 см, 20 см, 22 см.

5. Доказать, что периметр получившегося параллелограмма равен сумме длин боковых сторон данного равнобедренного треугольника. См. также № 4 к § 6 учебного пособия.

6. 10 см.

7. а) 16 см, 44 см; б) два решения: 3 см, 32 см или 23 см, 72 см.

8. $2(2a+b)$ или $2(2b+a)$.

9. а) 8 см; б) 45° и 90°.

10. Построить сначала прямоугольный треугольник по катету, равному 2 см, и гипотенузе, равной 5 см (см. № 30 к § 5 учебного пособия).

11. Если данный угол тупой, то задача может иметь не более одного решения, а если острый, то одно, два или ни одного решения.

12. Если заданы диагональ AC и угол B (рис. 9), то сначала надо построить $\triangle ACE$, у которого AE равно полупериметру параллелограмма, а $\angle E = \frac{1}{2}\angle B$. При построении $\triangle ACE$ можно воспользоваться соображениями, которые применялись при решении № 41 к § 5 учебного пособия. Другое решение использует задачу 5.

13. Сначала постройте вспомогательный треугольник, как в задаче 12 (по стороне, полусумме диагоналей и углу, противоположному данной стороне).

14. Можно воспользоваться теоремой 6.1 или утверждением № 15 к § 6, решенной в учебном пособии.

16. $AC \parallel BD$ (см. рис. 1), $\triangle BOD = \triangle AOC$, откуда $AC = BD$, следовательно, $ABDC$ параллелограмм; значит, $AB = CD$.

17. $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$.

18. Воспользоваться результатом № 6 к § 6 учебного пособия.

19. Треугольники AEH и CFG равны по первому признаку. Значит, $\angle AHE + \angle CFG = 180° - \angle A$. Далее, $\angle EHF + \angle GFH = (180° - \angle AHE - \angle DHF) + (180° - \angle CFG - \angle DFH) = 360° - (\angle AHE + \angle CFG) - (\angle DFH + \angle DHF) = \angle A + \angle D = 180°$. Поэтому $EH \parallel GF$. Точно так же $GE \parallel FH$.

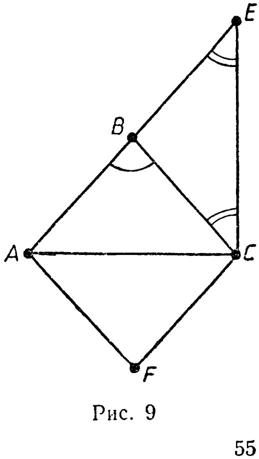


Рис. 9

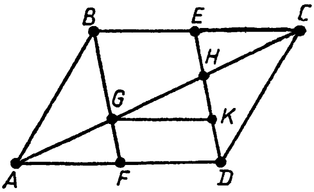


Рис. 10

20. Проведем через точку G прямую, параллельную BC (рис. 10). Она пересечет прямую ED в некоторой точке K, так как $ED \| BF$ (см. № 14 к § 6 учебного пособия). Треугольники AGF, GHK и CHE равны (по второму признаку). Значит, $AG = GH = HC$.

21. В приведенном доказательстве теоремы 6.2 используется свойство противолежащих сторон параллелограмма, утверждающееся теоремой 6.3, которая доказывается с помощью теоремы 6.2 (откройте учебное пособие и убедитесь в этом). Получается, что теорема 6.2 доказывается с помощью теоремы 6.3, а теорема 6.3 с помощью теоремы 6.2, что недопустимо. Логические ошибки такого рода называются порочным кругом.

22. Доказать сначала, что данный четырехугольник является параллелограммом.

23. Воспользоваться свойством углов, вписанных в окружность, и теоремой 6.2.

26. Построить сначала равнобедренный треугольник по основанию (данная сторона) и углу при нем (равному половине угла, смежного с данным).

27. Если на продолжении стороны AB прямоугольника $ABCD$ отложить отрезок $BE = BC$, то у треугольника AEC известны: сторона AC (диагональ прямоугольника), сторона AE (равная полупериметру прямоугольника) и угол AEC ($\angle AEC = \frac{1}{2} \angle ABC = 45°$). Треугольник AEC по этим данным можно построить.

28. Измерить и сравнить диагонали.

29. Обозначим $AD = BC = x$; $DC = AB = x + 250$. Из условия задачи $\frac{x+250}{x} = \frac{16}{11}$, откуда $x = 550$, $x + 250 = 800$.

Периметр прямоугольника: $2 \cdot (800 + 550) = 2700$ м. Скорость сторожа: 4 км/ч $= \frac{200}{3}$ м/мин. Время, за которое сторож может обойти по краю весь участок:

$$2700 : \frac{200}{3} = 40{,}5 \text{ мин.}$$

30. При нерациональном раскрое на изготовление каждой детали расходуется 175 пог. мм стандартной стальной полосы. При рациональном раскрое заготовки соответствующим образом переставляются (см. рис. 3), в результате чего достигается экономия $A_1K = x$ пог. мм на каждую пару. Определим x: $A_1K = x = A_1P - KP = 175 - KP$; $KP = DC_1 + C_1D_1$; $C_1D_1 = 60$ мм, $DC_1 = CD = 60$ мм. Следовательно, $PK = DC_1 + C_1D_1 = 60 + 60 = 120$ мм, а значит $A_1K = 55$ мм.

Отсюда заключаем, что при изготовлении 200 деталей мы сэкономили $55 \cdot 100 = 5{,}5$ пог. м стандартной стальной полосы.

31. 80° и 100°.

32. 60° и 120°.

33. 30° и 150°.

34. С помощью теоремы 6.1 сначала доказать, что получившийся четырехугольник — параллелограмм.

35. Воспользоваться № 13 к § 4 учебного пособия или установить его заново.

38. Воспользоваться утверждением № 14 к § 6 учебного пособия или доказать его заново.

39. При решении использовать свойство диагоналей ромба: «Каждая диагональ ромба является биссектрисой углов».

40. Если на продолжении полудиагонали AO ромба $ABCD$ отложить отрезок $OM = OB$, то у треугольника ABM будут известны: сторона AM, равная полусумме диагоналей, угол BAM, равный половине угла ромба при вершине A, и угол AMB, который равен половине угла, под которым пересекаются диагонали ромба, т. е. 45°. Треугольник ABM по этим данным можно построить.

41. Квадрат.

44. Построить сначала равнобедренный прямоугольный треугольник, периметр которого равняется данной полусумме. Для этого следует воспользоваться соотношениями, которые применялись при решении № 33 к § 4 учебного пособия.

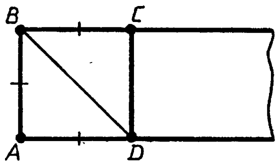


Рис. 11

45. Недостаточно, так как равные отрезки могут пересекаться под прямым углом не обязательно в середине каждого из них.

46. Так как образующиеся треугольники оба раза точно совмещаются, то диагонали данного четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, данный четырехугольник — параллелограмм. Его стороны равны между собой, значит, он — ромб. Но о диагоналях четырехугольника по результатам данной проверки ничего сказать нельзя. Поэтому, является ли данный четырехугольник квадратом, окончательного вывода сделать нельзя.

47. На ширине листа поместится $300:60 = 5$ шайб. Нам нужно будет $50 : 5 = 10$ рядов. Длина листа должна быть: $60 \cdot 10 = 600$ мм.

48. Надо отметить равные отрезки AD, AB и BC (рис. 11), потом обрезать по диагонали квадрата $ABCD$. Ясно, что $\angle ABD = \angle ADB = 45°$.

49. Легко видеть, что для составления квадрата потребуется не менее 7 палочек, поэтому нельзя составить квадрат со стороной менее 7 см. С другой стороны, сумма длин всех палочек равна 45 см, поэтому из них нельзя составить квадрат со стороной более 11 см. Из палочек данного набора можно составить отрезки длиной в 7, 8, 9, 10 и 11 см следующими способами:

$$
\begin{aligned}
7 &= 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3,\\
8 &= 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3,\\
9 &= 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4,\\
10 &= 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4,\\
11 &= 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5.
\end{aligned}
$$

Следовательно, из данного набора палочек можно сложить одним способом квадраты со сторонами 7 см, 8 см, пятью способами — квадраты со сторонами 9 см, 10 см и 11 см.

51. Одно из возможных построений указано на рисунке 12, где $MD = DO$ и $DC \parallel OK$.

52. Одно из возможных построений указано на рисунке 13, где $KM \parallel OD$ и $OM = MC$.

53. Середины противолежащих сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма (см. № 47 к § 6 учебного пособия).

54. Пусть вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 14). Проведем диагональ AC. Середина этой диагонали (точка O) является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (теорема 6.2). Средняя линия OP треугольника ACD, проходящая через середины сторон AC и CD, параллельна AD по теореме 6.8 и BC по теореме 4.1. Значит, прямая OP пересекает диагональ B_1D_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ в ее середине, т. е. точка пересечения диагоналей второго параллелограмма лежит на прямой OP (теорема 6.6). Точно так же доказывается, что она лежит и на прямой OQ (средней

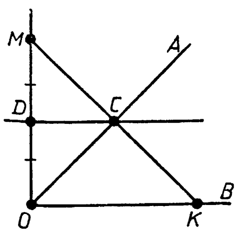


Рис. 12

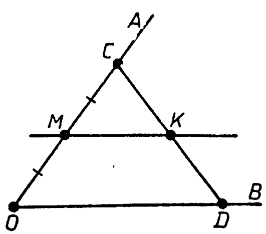


Рис. 13

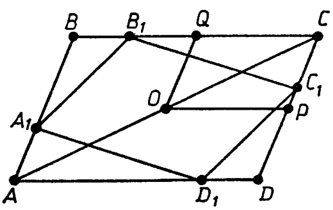


Рис. 14

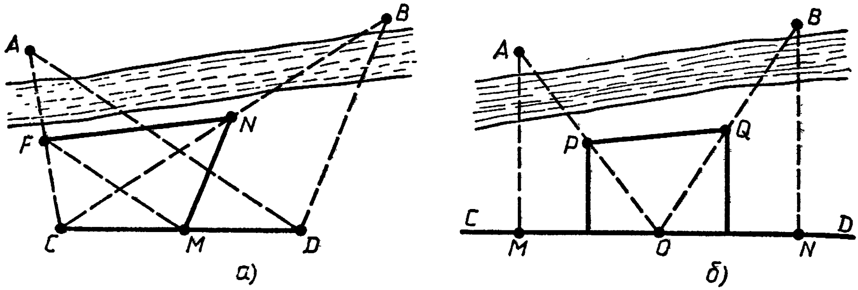


Рис. 15

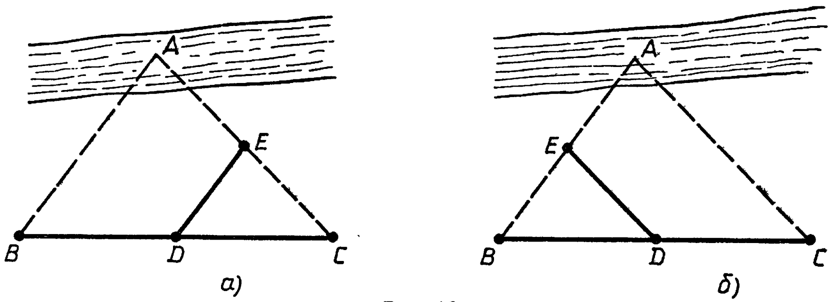


Рис. 16

линии $\triangle ACB$). А так как прямые OP и OQ пересекаются в точке O, то эта точка и есть точка пересечения диагоналей параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

55. 1) Провешиваем базис CD и прямые BC и AD (рис. 15, *а*). Находим точку M — середину CD и проводим $MN \parallel BD$ и $MF \parallel AD$. Очевидно, что точки F и N являются серединами сторон AC и BC, следовательно, FN есть средняя линия треугольника ABC и $AB = 2NF$.

2) Через взятую на местности точку O провешиваем прямую CD и через точки A и B проводим перпендикуляры $AM \perp CD$, $BN \perp CD$ (рис. 15, *б*). Через середины отрезков OM и ON проводим перпендикуляры к этим отрезкам и находим точки P и Q — середины сторон AO и BO. Так как PQ есть средняя линия треугольника AOB, то $AB = 2PQ$.

56. Выбрав точку C, находим середину D стороны BC (рис. 16, *а*). Проводим $DE \parallel AB$, тогда $AB = 2DE$. Второе решение получим, если проведем $DE \parallel AC$, тогда $AB = 2BE$ (рис. 16, *б*).

57. Разделить пополам сторону, соединяющую доступные вершины A и B, и через середину K провести прямую, параллельную стороне AC. Отметить точку M пересечения прямой со стороной BC. Тогда $P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + 2BM + 2KM$. Отрезки KM и BM можно измерить.

58. 20 см.

59. 140°, 80°, 100°.

60. 42 см.

62. Воспользоваться № 53 к § 6 учебного пособия.

63. Воспользоваться свойством параллельных прямых как равно отстоящих (см. № 42 к § 4 учебного пособия).

64. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

65. Середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами параллелограмма (см. № 47 к § 6 учебного пособия). Равенство сторон его следует из равенства углов при основании равнобокой трапеции (см. № 53 к § 6 учебного пособия).

66. $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ см.
67. $2\sqrt{3} \approx 3{,}4$ дм.
68. 4 см и 3 см.
69. 6,8 см, 6,8 см и 6,4 см.
70. $1\frac{2}{3}$ см, $4\frac{1}{3}$ см.
71. 9 м, 12 м, 15 м.
72. 6 м и 8 м.
73. Воспользоваться № 21 к § 7 учебного пособия. Можно также получить требуемое соотношение с помощью средних пропорциональных величин в прямоугольном треугольнике.
74. 28 см. Указание. Сначала найти основания. Меньшей является та боковая сторона трапеции, которая перпендикулярна основаниям. Обосновать это можно с помощью свойства перпендикуляра и наклонной, проведенных к прямой из одной и той же точки.

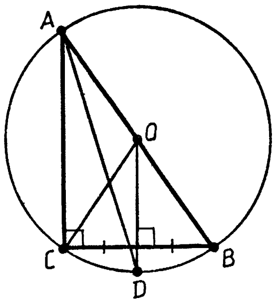


Рис. 17

75. В приведенном рассуждении все утверждения обоснованы, за исключением двух. А именно, не доказано, что точка Q лежит между точками A и B, а точка R — между точками A и C (факты эти взяты из рисунка). Одно из этих утверждений ошибочно. В самом деле, посмотрите на рисунок 17. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы точка O (см. № 49 к § 5 учебного пособия). По теореме 5.6 серединный перпендикуляр к катету также проходит через точку O. Пусть D — точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью, лежащая на луче, проходящем между сторонами угла BOC. Тогда $\angle BOD = \angle COD$ и, значит, по свойству вписанных углов, $\angle BAD = \angle CAD$, т. е. AD — биссектриса угла BAC. Отсюда следует, что рисунок 6, на основе которого проводились рассуждения, неправилен. Он и явился источником допущенной ошибки. Пример этот свидетельствует о правомерности одного из требований к доказательству теорем: «Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на теоремы и аксиомы, доказанные ранее» (см. учебное пособие, с. 14).

76. Обозначим искомое расстояние через x, тогда $x = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{20{,}2^2 - 18{,}62^2} = \sqrt{61{,}3} \approx 7{,}8$ м.

77. $AB = 120$ м, $AK = BE = 500$ м, $AD = 2800$ м. Из $\triangle AKD$ следует, что $DK = 2755$ м (рис. 18), $DC = 2 \cdot 2755 + 120 = 5630$ м.

78. $\triangle CME$ — прямоугольный (рис. 19), так как $\angle CME = 90^\circ$ и $MB \perp CE$; следовательно, $MB^2 = BE \cdot BC$; но $MB = \frac{l}{2}$, $BC = h$, а $BE = D - h$, тогда получим, что $\frac{l^2}{4} = (D - h)h$, или $\frac{l^2}{4} + h^2 = Dh$, откуда $D = h + \frac{l^2}{4h}$.

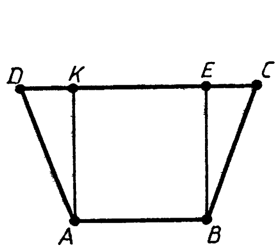


Рис. 18

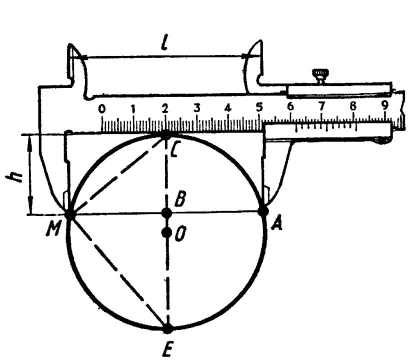


Рис. 19

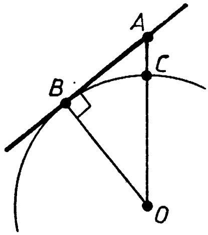


Рис. 20

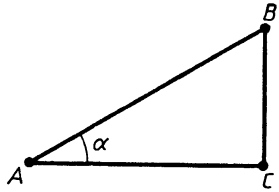


Рис. 21

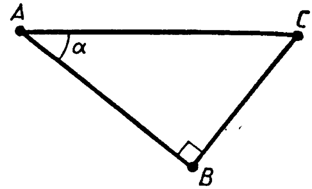


Рис. 22

79. Из $\triangle ADB$ (см. рис. 7) следует, что $BD = h = \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{225}{4}} = 4$ м, $AE = ER = RB = \frac{17}{6}$ м.

$AF = FQ = QD = DQ_1 = Q_1F_1 = F_1C = \frac{15}{6}$ м, $AQ = 5$ м, $AR = \frac{17}{3}$ м. Из $\triangle EFA$ следует, что $EF = \sqrt{\frac{289}{36} - \frac{225}{36}} = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$ м. Из $\triangle RQA$ следует, что $RQ = \sqrt{\frac{289}{9} - 25} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ м.

80. Из прямоугольного треугольника ABO (рис. 20) следует, что $AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} \approx 2072$ км.

81. По условию задачи $AB = 79{,}5$ м. $\angle AHB = 20°45'$, $\angle AHC = 63°30'$. В $\triangle BAH$ $AH = \frac{AB}{\operatorname{tg} 20°45'} \approx 209{,}8$ м. В $\triangle CAH$ $AC = AH \cdot \operatorname{tg} 63°30' \approx 421$ м.

82. Из $\triangle ACB$ (рис. 21) $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \approx 0{,}0170$, откуда $\alpha \approx 59'$.

83. Радиус BD действия крана (см. рис. 8) можно вычислить из прямоугольного треугольника BCD: $BD = BC \cos CBD = 9 \cos 26° \approx 8{,}09$ м.

84. Предположим, что катер выходит под углом α к первоначальному направлению крейсера и через x ч встретится с крейсером, тогда $BC = 36 \cdot x$ (рис. 22), $AC = 54 \cdot x$. Из прямоугольного треугольника ABC $\sin\alpha = \frac{36x}{54x} \approx 0{,}6667$, откуда $\alpha \approx 41°48'$.

85. Глубина станции $AO = 20$ см $\cdot\, 170 = 3400$ см $= 34$ м (рис. 23). Из $\triangle ADC$ $AC = \sqrt{1600 + 400} \approx 44{,}72$ см. Длина лестницы $AB = 170 \cdot AC = 170 \cdot 44{,}72 = 7602$ см ≈ 76 м. Из прямоугольного треугольника AOB $\sin\alpha = \frac{AO}{AB}$ или $\sin\alpha = \frac{34}{76} = 0{,}4474$, откуда $\alpha \approx 26°34'$.

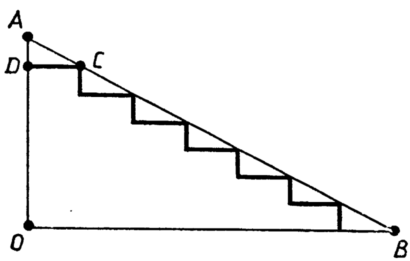


Рис. 23

86. Из $\triangle ACB$ (см. рис. 21) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{800} = 0{,}025$, откуда $\alpha \approx 1°26'$.

Самолету следует подниматься под углом, который больше $1°26'$.

87. По условию задачи подъем ступени $BC = 15{,}5$ см, а ее ширина $AC = 32{,}5$ см (см. рис. 21). Требуется определить $\angle CAB = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ACB $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} \approx 0{,}4769$, откуда $\alpha \approx 25°30'$.

88. В $\triangle$ ABC $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{a}$ (см. рис. 21), откуда $x = a \operatorname{tg} \alpha$.

89. В $\triangle ABC$ (см. рис. 21) $BC = x = AC \operatorname{tg} \alpha = 1200 \cdot \operatorname{tg} 25°17' \approx 567$ м, $AB = y = \frac{AC}{\cos\alpha} \approx 1327$ м.

90. а) $2\sin^2\alpha$; б) 1; в) $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $1 - \operatorname{tg}^2\alpha$; д) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; е) $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$; ж) $1 + \operatorname{ctg}^6\alpha$.

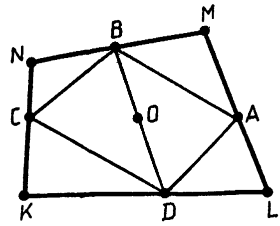


Рис. 24

91. а) Квадрат; б) параллелограмм (но не ромб и не прямоугольник); в) ромб (но не квадрат); г) прямоугольник (но не квадрат).

92. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ и $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

93. $(x - 3)^2 + (y \pm 3)^2 = 9$.

94. $ax + by = \frac{a^2 + b^2}{2}$ (прямая).

95. а) (305, 215); б) точки пересечения нет — прямые параллельны; в) (0, 0).

96. 6 см, т. е. диаметру окружности.

97. Указание. Вершины угла, центр окружности и одна точка касания являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

98. В двух точках. Указание. Расстояние от оси y до центра окружности меньше радиуса окружности.

99. В двух точках. См. указание к предыдущей задаче.

100. а) Пересекает в двух точках; б) касается; в) не пересекает. Указание. Для вычисления расстояния от гипотенузы до центра окружности, т. е. вершины прямого угла, можно воспользоваться формулой из № 73 к § 7 учебного пособия.

101. а) Не могут; б) не могут. Указание. Симметрии относительно точки и относительно прямой являются движениями (теоремы 9.1 и 9.2).

102. а) Не могут; б) не могут. Указание. Основания трапеции различны по длине.

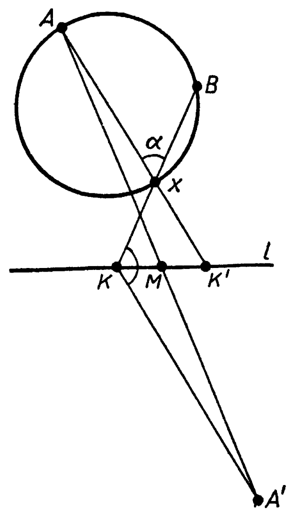


Рис. 25

103. Воспользоваться свойствами движения (теорема 9.3) и теоремой 6.1 (признак параллелограмма). См. также указание к дифференцированному заданию Д-12.

104. Не существует. Указание. Прямые, в которые переходят прямые a_1 и b_1, как и прямые a_1 и b_1, имеют общую точку.

105. Воспользоваться результатом задачи 104 и сохранением расстояний при движении.

106. а) Не могут; б) не могут. См. предыдущую задачу.

107. Вывести из № 67 к § 6 учебного пособия, что $\triangle A_1B_1C_1$ симметричен $\triangle PQR$ относительно точки M.

108. Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм, вписанный в данный четырехугольник $LMNK$, точка O — центр симметрии параллелограмма. Данные точки B и D принадлежат соответственно MN и KL (рис. 24). Очевидно, A есть точка пересечения ML и образа отрезка NK при симметрии относительно центра O, C — пересечение NK и образа ML при симметрии с центром O.

Примечание. В этой задаче предполагается, что вершины искомого параллелограмма могут принадлежать сторонам четырехугольника или их продолжениям.

109*. Пусть точка A' симметрична точке A относительно точки M (рис. 25). Тогда $A^1K \parallel AK^1$ (см. задачу 5 из § 4 учебного пособия) и, значит, $\angle BKA^1 = 180° -$

— α, где $\alpha = \angle AXB$. Точку K можно построить воспользовавшись утверждением задачи 59 из § 6 учебного пособия. Задача может иметь два решения.

110. Пусть точка O — центр окружности, AB и CD — параллельные хорды этой окружности. Прямая OK, проходящая через точку O и перпендикулярная AB и CD, содержит высоты равнобедренных треугольников AOB и COD. Так как высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и медианой, то прямая OK проходит через середины хорд AB и CD.

111. Пусть O — центр окружности F_1 и O_1 — центр окружностей F_2 и F_3. И пусть окружности F_1 и F_2 пересекаются в точках A и B, а окружности F_1 и F_3 — в точках C и D. Тогда OO_1 — ось симметрии фигуры, образованной окружностями F_1, F_2 и F_3.

112. а) Постройте любой диаметр одной окружности и перпендикулярный ему диаметр другой окружности; б) диаметр AB меньшей окружности продолжить до пересечения в точке C с большей окружностью; построить оси симметрии отрезков AC и BC.

113. Так как углы при основании равнобокой трапеции равны (см. № 53 к § 6), то при продолжении ее боковых сторон до пересечения получается равнобедренный треугольник. Прямая l, содержащая медиану, проведенную к основанию этого треугольника, является его осью симметрии (см. № 17 к § 9). Значит, эта прямая l является осью симметрии исходной равнобокой трапеции и проходит через середины оснований и точку пересечения продолжений боковых сторон. Диагонали трапеции симметричны друг другу относительно l, поэтому их точка пересечения тоже принадлежит l (иначе диагонали пересекались бы в двух симметричных относительно l точках).

114. $\angle OBM = \angle OBN = 45°$. Поэтому точка B есть точка пересечения частей окружностей с хордами OM и ON, вмещающих углы по $45°$.

115. Построить образ одной из окружностей при повороте на угол $60°$ с центром в данной точке O. Точка пересечения полученной окружности и второй из данных окружностей является второй вершиной треугольника.

116. Построить хорду окружности данной длины и окружность, концентрическую данной, проходящую через данную точку. Рассмотреть поворот вокруг центра окружностей, при котором данная точка переходит в точку пересечения построенных хорды и окружности.

117. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$, M, N, K, L — точки пересечения квадрата с данными прямыми (точки M, N, K и L принадлежат соответственно сторонам AB, CD, BC, AD квадрата). Тогда поворот на $90°$ относительно точки O переводит отрезок AB в DA. Образом точки M будет такая точка M' отрезка AD, что $\angle MOM' = 90°$, т. е. точка L. Тот же поворот на $90°$ относительно центра O переводит точку N в точку K. Следовательно, поворот на $90°$ относительно точки O переводит MN в LK, а поэтому $MN = KL$.

118. См. указание к задаче 104.

119. Утверждение следует из определения преобразования подобия.

122. Применить гомотетию с центром в точке O и воспользоваться тем, что при гомотетии, как и при любом преобразовании подобия, прямые переходят в прямые.

124. Для одной из сторон угла построить гомотетичный ей луч с центром гомотетии M и коэффициентом, равным данному отношению. Точку пересечения построенного луча со второй стороной угла соединить прямой с точкой M.

125. Построить касательную к окружности в точке M_1, пересекающую AC в точке A_1 и BC в точке B_1 (рис. 26). Убедиться, что $CA_1 + A_1M_1 = CB_1 + B_1M_1$, и воспользоваться гомотетичностью треугольников ABC и A_1B_1C.

126. Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую окружность ω в окружность ω_1 (рис. 27). Точки N и P перейдут при этой гомотетии в точки N_1, P_1. Точка N_1 — точка пересечения окружности ω_1 с прямой AN. Точка P_1 — точка пересечения окружности ω_1 с прямой AP. Тогда прямая N_1P_1 как образ прямой NP при гомотетии параллельна ей. В силу параллельности прямых MQ и N_1P_1 хорды MN_1 и QP_1 равны (см. задачу 110), а значит, равны соответствующие им вписанные углы MAN_1 и QAP_1, т. е. $\angle MAN = \angle QAP$.

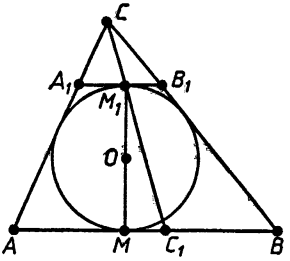


Рис. 26

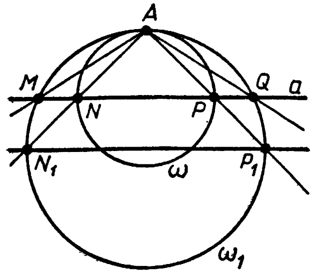


Рис. 27

127. Отрезки, соединяющие точку пересечения продолжений боковых сторон с серединами оснований, являются медианами двух подобных треугольников. Поэтому они образуют соответственно равные углы с продолжениями боковых сторон, т. е. лежат на одной прямой. Так же рассматриваются отрезки, соединяющие точку пересечения диагоналей с серединами оснований трапеции.

128. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения. Получится прямоугольный треугольник. Середины оснований трапеции лежат на его медиане, проведенной из вершины прямого угла (задача 127).

129. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AB.

130. Не может. Указание. Тупой угол, образованный медианой с основанием, больше всех остальных углов получившихся треугольников.

131. 36°, 72°, 72°.

132. По двум углам.

133. Из подобия прямоугольных треугольников AA_1C и BB_1C следует пропорция $\frac{A_1C}{AC}=\frac{B_1C}{BC}$. Кроме того, в треугольниках A_1B_1C и ABC общий угол C.

134. 4; если $\triangle ABC$ — равнобедренный, то 6.

135. Рассмотреть подобные треугольники BHA_1 и ACA_1, HAB_1 и CBB_1.

136. Построить прямоугольный треугольник по отношению катета к гипотенузе, затем ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

137. Из подобия треугольников, отсекаемых высотами, следует, что $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$, $\frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c}$. Сначала построить треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому по сторонам a_1, b_1, c_1, где a_1 — произвольный отрезок, $b_1=\frac{a_1h_a}{h_b}$, $c_1=\frac{a_1h_a}{h_c}$; в частности, можно положить $a_1=h_b$ (см. № 59 к § 9 учебного пособия).

138. Даны h_c, угол C и отношение $AD:DB=m:n$, где D — основание высоты h_c.

Построение. 1) Построим прямую l и на ней точки D_1, A_1 и B_1 так, что $A_1D_1=m$, $D_1B_1=n$ и точка D_1 лежит между точками A_1 и B_1.

2) Построим по углу C дугу окружности с концами в точках A_1 и B_1.

3) Из точки D_1 восставим перпендикуляр к A_1B_1. Пересечение его с дугой окружности есть точка C_1.

4) Треугольник, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$, с коэффициентом $k=h_c:C_1D_1$ — искомый.

139. $MN=\frac{(a+b-c)\cdot c}{a+b+c}$. Решение. Пусть R, P, S и Q — точки касания окружности с AC, MN, CB и AB соответственно. Так как касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $P_{CMN}=CM+MN+CN=CM+MR+RN+CN=CP+CS=(AC-AQ)+(CB-BQ)=AC+CB-AB=b+a-c$. Из подобия $\triangle CMN$ и $\triangle CAB$ находим $MN=c\frac{a+b-c}{a+b+c}$.

140. Указание. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, а $P_{DEC} = a + b$ (треугольники ADK и BEK равнобедренные).

141. Указание. Воспользоваться задачей 140.

142. Если V — точка пересечения биссектрис, то (см. задачу 141) $\frac{AV}{VA_1} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{BV}{VB_1} = \frac{a+c}{b}$, где a, b, c — стороны треугольника. Если $\frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a}$, то $(a-b)(a+b+c) = 0$, следовательно, $a = b$.

143. $\frac{ab}{a+b}$. Указание. $CD = C_1D$, $\triangle ABC \sim \triangle C_1BD$.

144. $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$. Решение. Пусть ABC — данный треугольник, AD — перпендикуляр, опущенный на прямую BC, $BE \parallel AD$, E лежит на AC. Так как по условию $\angle BAC = \angle ABE$ и $BE \parallel AD$, то $\angle BAC = \angle BAD$, т. е. AB—биссектриса прямоугольного $\triangle ACD$. Пусть $AD = x$, тогда (см. задачу 143) $AE = \frac{bx}{b+x}$, $EC = b - AE = \frac{b^2}{b+x}$. Из подобия $\triangle CBE$ и $\triangle CDA$ находим: $\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{CE} = \frac{x}{b}$, т. е. $BD = \frac{ax}{b}$. По теореме Пифагора, в прямоугольном треугольнике CAD

$$AD^2 + CD^2 = x^2 + \left(a + \frac{ax}{b}\right)^2 = b^2.$$

Из этого квадратного уравнения находим: $x = b\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$. Применим теорему Пифагора к $\triangle ABD$.

$$c^2 = AD^2 + BD^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2} = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\left(b \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right)^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2}{b^2 + a^2}.$$

145. BD — биссектриса угла ABC. Из подобия треугольников BDC и ABC следует, что

$$\frac{a}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{a}, \quad CD = \frac{a^2}{b}, \quad BD = \frac{ac}{b}.$$

В треугольнике ABD углы при основании равны, следовательно, $BD = AD = b - CD$; тогда $b^2 - a^2 = ac$.

146. Опустить из точки A перпендикуляр AD на BC и провести диаметр AE. Использовать подобие прямоугольных треугольников ADB и ACE.

147. Использовать формулу задачи 146 и аналогичную формулу для расстояния d от точки A окружности радиуса R до прямой, касающейся окружности в точке B:

$$d = \frac{AB^2}{2R}.$$

148. Использовать результат задачи 146.

149. $2\sqrt{mn}$. Указание. Рассмотреть трапецию, образованную тремя данными касательными и диаметром, соединяющим точки касания. Найти вторую боковую сторону (высоту трапеции) с помощью теоремы Пифагора.

150. Треугольники подобны, значит, $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, $a^2 + b^2 = c^2$ или $aa + bb = cc$. Подставив вместо a, b и c их выражения через a_1, b_1, c_1, получим $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

СОДЕРЖАНИЕ

10 к.